Exercice 1. Sommes et produits finis ♡ [Corrigé] ★☆☆

Donner une expression ramassée de chacune de ces expressions en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \qquad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{i+j}}$$

$$\prod_{k=1}^{n} k \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+1} \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

Exercice 2. [Corrigé] ★☆☆

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{9^{\ln n}} \qquad \sum \frac{n+1}{n^2-3n+2} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-2}{2^n+1} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Exercice 3. Calculs de sommes ♡ [Corrigé] ★★☆

Montrer la convergence puis calculer la somme des séries suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{6}{5^{n+2}} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+n+1}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{n^2-1}{4^n}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n+(-1)^n n 2^n}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \sum_{n\geqslant k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} \ (k\in\mathbb{N}^*)$$

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$ converge.
2. On note S_n la somme partielle de rang de n de cette série, et S sa somme.

   Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
3. En déduire une fonction écrite en `Python` renvoyant une approximation à ε-près de la valeur S (ε étant passé en argument de la fonction demandée).

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★★☆

1. a. Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln n$.
2. Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1}-u_n)$ converge.

Exercice 6. Autour de la série harmonique ♡ [Corrigé] ★★★

1. On considère les suites $(H_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n).$$

   a. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   c. Montrer que, pour tout $n\geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

   d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel positif ou nul γ. Cette constante est appelée la **constante d'Euler** ($\gamma \approx 0,577215665$).

   e. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

2. À l'aide du développement asymptotique ci-dessus, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (appelée série harmonique alternée) converge et calculer sa somme. *On passera par les sommes partielles en séparant les termes de rang pair ou impair.*

   Remarque : la série harmonique alternée fournit un exemple de série convergente non-absolument convergente.

Exercice 7. Comparaison série-intégrale ♡ [Corrigé] ★★★

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$.
2. En déduire que :
$$\forall k \geqslant 3,\ \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k}$$
3. À l'aide d'un encadrement par des intégrales, en déduire que :
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}.$$
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 8. ♡ [Corrigé] ★★★

Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{\alpha+k-1} + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}.$$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$ converge et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Retrouver la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★★

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si n est un carré} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$$
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 10. Critère spécial des séries alternées [Corrigé] ★★★

1. **Démonstration du critère spécial**

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs et convergeant vers 0.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k.$$
   a. Montrer que les suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$.

2. **Applications**

   a. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

   b. Discuter de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en fonction du réel α.

Exercice 11. Critère de convergence par comparaison [Corrigé] ★★★

1. Vérifier que $\dfrac{1}{\sqrt{n!}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n!}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n!}}$.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

1. On reconnait une somme télescopique :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) = \ln(n+1).$$

2. D'après la formule du binôme de Newton, on a :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = 2^n$$

3. Par le même raisonnement :
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

4. On reconnait une somme télescopique :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k+1}{n+1}-\binom{n+k}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}-\binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

5. On reconnait une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+n\right) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

6. Idem :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\max(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. Et une fois de plus ici :
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n+i+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.\end{aligned}$$

8. On reconnait ici deux sommes de termes consécutifs de suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$:
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^{i+j}} = \left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^j}\right) = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2.$$

9. Par définition du factoriel : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = n!$.

10. On reconnait un produit télescopique : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.

11. Idem ici : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+1} = \frac{1}{2n+1}$.

12. En faisant apparaitre le produit de tous les entiers de 1 à $2n+1$ au dénominateur, on arrive à réduire le produit :
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k(2k+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{9^{\ln n}} = \dfrac{1}{e^{\ln n \ln 9}} = \dfrac{1}{n^{\ln 9}}$. Puisque $\ln 9 \geqslant 2$, il vient que : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{9^{\ln n}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{9^{\ln n}}$ converge d'après le critère de comparaison de séries à termes positifs.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{n+1}{n^2-3n+2} \geqslant 0$ car $n^2-3n+2 = (n-1)(n-2)$. Puisque $\dfrac{n+1}{n^2-3n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et puisque la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge, la série $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n^2-3n+2}$ diverge d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs.

3. Remarquons que, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{n-2}{2^n+1} \geqslant 0$ et $\dfrac{n-2}{2^n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^n}$. Puisque $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, la série géométrique dérivée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{2^{n-1}}$ converge et donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^n}$ aussi par linéarité. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n-2}{2^n+1}$ converge d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{3^n} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right) \geqslant 0$.

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$, $n^2 \sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9} n(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$.

   Puisque $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, la série géométrique dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$ converge. Par linéarité, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n}{3^n}$ converge. D'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2 \sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ converge.

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. On peut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$.

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{6}{5^{n+2}} = \dfrac{6}{25}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

   Puisque $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{5^n}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}$.

   On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{6}{5^{n+2}}$ converge et a pour somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{6}{5^{n+2}} = \dfrac{3}{10}$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2+n+1}{n!} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n+2}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 4e.
\end{aligned}$$

   On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n^2+n+1}{n!}$ converge et a pour somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n!} = 4e$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(-1)^n \frac{n^2-1}{4^n} = n^2\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n = n(n-1)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} + n\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

   Puisque $\left|-\dfrac{1}{4}\right| < 1$, les séries géométriques (et géométriques dérivées)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n-1)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} n\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

   convergent et ont respectivement pour somme $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{16}{25}$ et $\dfrac{128}{125}$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{n^2-1}{4^n}$ converge par linéarité et a pour somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{4^n} &= \frac{1}{16}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\
&= -\frac{112}{125}.
\end{aligned}$$

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On reconnait ci-dessous des sommes partielles de séries exponentielles :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{3^n + (-1)^n n 2^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{3^n}{n!} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{3^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-2)^n}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^3 - 2e^{-2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n+(-1)^n n 2^n}{n!}$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+(-1)^n n2^n}{n!} = e^3 - 2e^{-2}.$$

6. Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N} (\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln(n)) \\ &= \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln 2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2.$$

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $N \geqslant k$.

$$\sum_{n=k}^{N} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{N-k}\frac{1}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{k!}.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant k} \frac{\binom{n}{k}}{n!}$ converge et a pour somme $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \frac{e}{k!}$.

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Puisque la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$ converge absolument, donc converge.

2. On remarque que la série est à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|S_n - S| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Les deux séries ci-dessus sont bien convergentes, en tant que restes de séries convergentes.

3. Dès que n est suffisamment grand pour que $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$, on a $|S_n - S| \leqslant \varepsilon$, i.e. S_n est une approximation de S à ε-près.

On propose alors deux méthodes pour évaluer le plus entier n vérifiant $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$:

```python
def approx(eps):
    n, Sn = 0
    while 1/(2**n) > eps:
        Sn += np.sin(np.pi/2**n)/(2**n)
        n += 1
    return Sn
```

```python
def approx_bis(eps):
    n = int(-np.log2(eps)) + 1
    Sn = 0
    for k in range(n+1):
        Sn += np.sin(np.pi/2**k)/(2**k)
    return Sn
```

On remarquera le "+1" dans le calcul de n, nécessaire dans le cas général où −np.log2(eps) ne serait pas un entier (on rappelle que la fonction `int` *joue le rôle ici de partie entière).*

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. a. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0.$$

Le terme général d'une série convergente converge donc vers 0.

b. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln n \neq 0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln n$ diverge par contraposée du résultat démontré à la question précédente.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$$

On en déduit immédiatement le résultat : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction inverse étant décroissante sur $[n, n+1]$, on a :

$$\forall x \in [n, n+1],\ \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors :

$$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n} = \frac{1}{n}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$. Or d'après la question 1.a, on a $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$, i.e. $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc bien décroissante.

c. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On a : $u_n - \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$. Or :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Ainsi, en sommant ces inégalités on $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, i.e. $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

d. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel positif ou nul, qu'on notera γ.

e. Par définition de γ, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2. Notons, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= \sum_{\substack{n=1\\ n\text{impair}}}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{n=1\\ n\text{pair}}}^{2N} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2\sum_{\substack{n=1\\ n\text{pair}}}^{2N} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} \\ &= H_{2N} - H_N. \end{aligned}$$

Ainsi $S_{2N} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(2N) + \gamma - \ln(N) - \gamma + o(1) \underset{N\to+\infty}{=} \ln 2 + o(1)$.

On en déduit que la suite $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2$.

Puisque $S_{2N+1} = S_{2N} + \dfrac{1}{2N+1}$, la suite $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers $\ln 2$.

On en déduit que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers $\ln 2$, i.e. la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonctions logarithme et inverse) et :

$$\forall t > 0,\ f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

La fonction f est donc croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$.

2. Remarquons que $3 < e$. Pour tout $k \in [\![3, n]\!]$, on a, par décroissance de f sur $[e, +\infty[$ donc sur $[k, k+1]$ (et croissance de l'intégrale) :

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

3. Soit $n \geqslant 3$. En sommant les encadrements précédents, on trouve :
$$\sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k}$$
ie.
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln 3}{3} \leqslant \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_3^n \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln n}{n}$$
i.e.
$$\frac{1}{2}\ln^2 n + \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln^2 3 \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{1}{2}\ln^2 n + \frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{2}\ln^2 3$$
L'étude de la limite du quotient $\frac{u_n}{\frac{\ln^2 n}{2}}$ où $u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$ (croissances comparées et théorème d'encadrement) montre que :
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}.$$

4. Pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$. Puisque la série harmonique diverge, la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln n}{n}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. Soit x un réel positif et n un entier naturel.
On reconnait une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{\alpha+k-1} = x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = x^{\alpha-1}\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}.$$
On en déduit que :
$$\forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{\alpha+k-1} + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\left(x \mapsto (-1)^k x^{\alpha+k-1}\right)$ est continue sur $]0,1]$, prolongeable par continuité en 0, et :
$$\int_0^1 (-1)^k x^{\alpha+k-1}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{k+\alpha}.$$
En intégrant l'égalité de la question précédente, on obtient, par linéarité de l'intégrale :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}\right)$ est continue sur $[0,1]$ et :
$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 x^{n+\alpha}\,\mathrm{d} = \frac{1}{n+\alpha+1}.$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\alpha+1} = 0$, on en déduit par le théorème d'encadrement, que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0.$$
On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

3. On retrouve le résultat attendu en choisissant $\alpha = 1$.

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons S_n la somme des n premiers termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ carré}}}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ non carré}}}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}.$$

2. En notant S la somme de la série convergente de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, on a :
$$\forall n \geqslant 1,\ S_n \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2S.$$
La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $2S$, i.e. la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0.$$
$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0.$$

On a de plus :

$$|S_{2n+1} - S_{2n}| = u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que les suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b. D'après le théorème des suites adjacentes, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui revient à dire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ converge.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $u_n \geqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car la suite inverse est décroissante et la fonction sin est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant convergente vers 0, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est donc convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien (strictement) positives.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha \quad (\leqslant 1 \text{ si } \alpha > 0)$

- Si $\alpha > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien décroissante et convergente vers 0. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est donc convergente d'après le critère spécial des séries alternées.
- Si $\alpha \leqslant 0$, le terme général de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 (on pourra séparer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha < 0$ pour le vérifier), donc la série diverge.

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n!} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} = 0$, i.e. :

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}} \geqslant 1$, i.e. $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n!}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

3. Puisque la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{\sqrt{n!}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n!}}$ aussi.