1 Identifier une situation de dénombrement

Dans une situation de dénombrement, il est nécessaire de se poser deux questions fondamentales :

(i) l'ordre des éléments a-t-il de l'importance ?

(ii) les éléments peuvent-ils être répétés ?

- **Si l'ordre des éléments a de l'importance** :
  - Si les éléments peuvent être répétés, on utilise alors les p-**listes**.
  - Si les éléments sont distincts, on utilise les **arrangements** (p-listes sans répétition) et **permutations**.
- **Si l'on ne tient pas compte de l'ordre des éléments** :
  - Si les éléments sont distincts, on utilise les **combinaisons**.
  - Si les éléments peuvent être répétés, le cours ne fournit pas de réponse immédiate...

Théorème 1 (***Dénombrement des p-listes***)

Il y a n^p p-listes d'éléments d'un ensemble de cardinal n.

Le choix d'une p-liste peut être modélisé par p **tirages successifs avec remise** dans un ensemble de cardinal n.

Exercice 1. *Dénombrons les nombres binaires à 5 chiffres.*

Un nombre binaire une liste ordonnée d'éléments à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec répétition possible.

Le nombre de nombres binaires à 5 chiffres est donc $2^5 = 32$.

Autre méthode (principe multiplicatif) : pour le premier chiffre, il y a deux possibilités ; il y en a encore deux possibilités pour le second, et ainsi de suite jusqu'au cinquième chiffre. Par principe multiplicatif, il y a 2^5 nombres binaires à 5 chiffres.

Théorème 2 (***Dénombrement des arrangements***)

Il y a $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments (p-listes sans répétition) d'un ensemble de cardinal n.

Le choix d'une p-liste sans répétition peut être modélisé par p **tirages successifs sans remise** dans un ensemble de cardinal n.

Exercice 2. *Déterminons le nombre de podiums possibles lors d'une course où 8 athlètes s'affrontent.*

Un podium est une liste ordonnée de trois individus distincts, i.e. une 3-liste. Il y a donc $A_8^3 = 336$ podiums possibles.

Autre méthode (principe multiplicatif) : il y a 8 choix possibles pour la médaille d'or, 7 choix pour celle d'argent puis 6 choix pour celle de bronze. Par le principe multiplicatif, il y a donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

Théorème 3 (***Dénombrement des combinaisons***)

Il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons à p éléments (sous-ensembles à p éléments) d'un ensemble de cardinal n.

Le choix d'une combinaison à p éléments peut être modélisé par un **tirage simultané de p éléments** (équivalent à p **tirages sans remise et sans ordre**) dans un ensemble de cardinal n.

Exercice 3. *Dénombrons, dans un jeu de 52 cartes, les mains de 4 cartes.*

Dans une main de 4 cartes, il ne peut y avoir répétition de cartes et l'ordre des cartes n'a pas d'importance.

On cherche donc le nombre de sous-ensembles à 4 éléments d'un ensemble à 52 éléments.

Ainsi, il y a $\dbinom{52}{4} = \dfrac{52!}{48!4!} = 270725$ mains de 4 cartes dans un jeu de 52 cartes.

2 Calculer la probabilité d'un événement

Pour calculer la probabilité d'un événement B, on raisonne sur cet événement (et non sa probabilité !).

(i) On peut considérer son **complémentaire** $\overline{B}$.

(ii) Si B s'écrit comme une **union d'événements disjoints**, on applique la **σ-additivité**.

(iii) Si B s'écrit comme une **intersection** d'événements A_i, on étudie l'**indépendance** des événements A_i.

- S'ils sont mutuellement indépendants, $\mathbb{P}(B)$ est le produit des probabilités $\mathbb{P}(A_i)$.
- Sinon, on applique la formule des probabilités composées.
  On appliquera généralement la formule des probabilités composées si l'expérience décrite peut se décomposer en une suite d'expériences plus simples.

(iv) Si on sait décrire l'événement B par **disjonction de cas**, on applique la **formule des probabilités totales** : on connait un système complet (ou quasi-complet) d'événements $(A_i)_{i\in I}$ (associés aux cas de la disjonction). Il suffit alors de calculer les probabilités $\mathbb{P}(A_i \cap B)$.

On pourra s'aider d'un arbre pour visualiser la situation.

(v) Si on cherche à calculer une **probabilité conditionnelle** : on applique la **définition des probabilités conditionnelles** (puis éventuellement la **formule de Bayes**).

Exercice 4. *La probabilité que deux étudiants d'une classe de 23 aient la même date d'anniversaire dépasse 0,5.*

Considérons l'événement complémentaire $\overline{B}$: "les étudiants ont des dates d'anniversaire (deux-à-deux) distinctes".
En numérotant les étudiants, on peut modéliser l'expérience (tirage de 23 dates) par l'univers $\Omega = [\![1, 365]\!]^{23}$.
Il y a donc $\mathrm{card}(\Omega) = 365^{23}$ dates d'anniversaires possibles pour 23 étudiants.
Dénombrer $\overline{B}$ revient à chercher le nombre de 23-listes sans répétition dans $[\![1, 365]\!]$. Il y en a $\mathrm{card}\left(\overline{B}\right) = A_{365}^{23}$.
Étant en situation d'équiprobabilité, on a $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = \dfrac{A_{365}^{23}}{365^{23}}$. On en déduit que $\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{A_{365}^{23}}{365^{23}} \approx 0,507$.

Exercice 5. *On procède à une suite illimitée de tirages équiprobables de nombres entiers entre 0 et 9. À un certain moment, on obtient le nombre 4. Quelle est la probabilité que le premier nombre tiré différent de 4 soit 7 ?*

On note A l'événement dont on cherche la probabilité.
On a $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, où, pour tout $n \geqslant 1$, A_n désigne l'événement "on a tiré $(n-1)$ fois 4 puis un 7".
Par indépendance des tirages et équiprobabilité des numéros, on a $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{10^n}$.
Puisque $(A_n)_{n\geqslant 1}$ forme une famille d'événements deux-à-deux disjoints, on obtient :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 = \frac{1}{9}$$

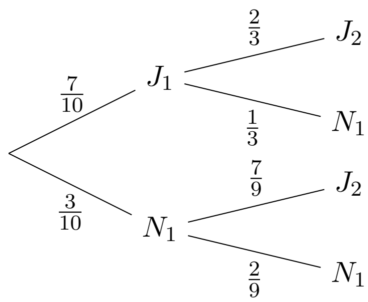
(la série converge par σ-additivité).

Exercice 6. *Une urne contient 7 boules jaunes et 3 boules noires. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit jaune ?*

Pour $i = 1$ et $i = 2$, on note J_i (resp. N_i) l'événement "on tire une boule jaune (resp. noire) au i-ème tirage".

On connait les probabilités suivantes

$$\mathbb{P}(J_1) = \frac{7}{10},\ \mathbb{P}(N_1) = \frac{3}{10},\ \mathbb{P}_{J_1}(J_2) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}_{N_1}(J_2) = \frac{7}{9}.$$



Puisque (J_1, N_1) forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J_2) &= \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}_{J_1}(J_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(J_2)\\ &= \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{10}.\end{aligned}$$

Exercice 7. *On dispose de 3 urnes, chacune contient 10 boules. La première contient une 1 blanche, la seconde 2 blanches, et la troisième 6 blanches. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule blanche dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir choisi la troisième urne ?*

On note B l'événement "on tire une boule blanche" et, pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$, U_i l'événement "on a choisi l'urne i". On cherche à calculer $\mathbb{P}_B(U_3)$ (alors qu'on connait $\mathbb{P}_{U_3}(B)$). On applique alors la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(U_3) = \frac{\mathbb{P}(B \cap U_3)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}_{U_3}(B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Puisque (U_1, U_2, U_3) forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(B) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}_{U_2}(B) + \mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}_{U_3}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10}.$$

La probabilité d'avoir choisi la troisième urne sachant qu'on a tiré une boule blanche est donc $\mathbb{P}_B(U_3) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$.