

1 Espaces probabilisables discrets

Définition 1

On dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$.

Exemple 2

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\llbracket -1, +\infty \rrbracket$ et plus généralement tous ceux de la forme $\llbracket n_0, +\infty \rrbracket$ ($n_0 \in \mathbb{Z}$) sont dénombrables.
Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarque 3

Les indices de sommation d'une série forment un ensemble dénombrable.

Définition 4

On appelle **univers des possibles** l'ensemble Ω des résultats possibles décrivant une expérience aléatoire.
*On ne considérera dans ce chapitre que des univers **discrets**, i.e. finis ou dénombrables.*

Exemple 5

- On lance un dé. On peut alors choisir $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- On lance une pièce. On choisit alors $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance une pièce n fois. On choisit alors $\Omega = \{P, F\}^n$.
- On lance une pièce indéfiniment. On choisit alors $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$.
- Un urne contient une boule blanche, notée B , et quatre boules rouges, notées R .
 - On tire successivement deux boules avec remise : $\Omega = \{(B, B), (B, R), (R, B), (R, R)\}$.
 - On tire successivement deux boules sans remise : $\Omega = \{(B, R), (R, B), (R, R)\}$.
 - On tire simultanément deux boules : $\Omega = \{\{B, R\}, \{R, R\}\}$.

Définition 6

On appelle **tribu** (ou **σ -algèbre**) sur un univers Ω tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) la tribu $\mathcal{T}$ contient l'univers : $\Omega \in \mathcal{T}$;
- (ii) la tribu $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire : $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} \in \mathcal{T}$;
- (iii) la tribu $\mathcal{T}$ est stable par réunion d'une suite d'événements de la tribu :

$$\forall (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}.$$

On définit alors les éléments de la tribu $\mathcal{T}$:

- les élément de $\mathcal{T}$ sont appelés **événements** de l'expérience aléatoire,
- les singletons de $\mathcal{T}$ sont appelés **événements élémentaires**,
- l'événement Ω est appelé **l'événement certain**, l'événement $\emptyset$ est appelé **l'événement impossible**,

On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est un **espace probabilisable**.

Exemple 7

Soit Ω un univers et soit $A \subset \Omega$. Les ensembles $\mathcal{T}_1 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\Omega, A, \bar{A}, \emptyset\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des tribus sur Ω .

Proposition 8 (*admise*)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Alors :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- (ii) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$ sont des événements, i.e. $A \cap B \in \mathcal{T}$, $A \cup B \in \mathcal{T}$ et $A \setminus B \in \mathcal{T}$.
- (iii) la tribu $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable.

Définition 9 (*Vocabulaire des opérations sur les événements*)

Soient A et B deux événements d'un univers des possibles Ω .

- L'événement $\overline{A}$ est appelé **l'événement contraire** de A .
- L'événement $A \cap B$ est l'événement “ **A et B** ”.
- L'événement $A \cup B$ est l'événement “ **A ou B** ”.
- L'événement $A \setminus B$ est l'événement “ **A privé de B** ”, ou encore “ **A mais pas B** ”.
- On dit que A **implique** B si $A \subset B$,
- On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 10

On lance une infinité de fois un dé et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, S_k l'événement “on obtient 6 au k -ème lancer”. Traduisons les événements suivants à l'aide de la symbolique mathématique de la théorie des ensembles :

- (i) “on obtient jamais de 6” :
- (ii) “on obtient au moins une fois 6 lors de la partie” :
- (iii) “on obtient au moins une fois 6 à partir du cinquième lancer” :
- (iv) “on n'obtient que des 6 à partir du cinquième lancer” :
- (v) “on n'obtient que des 6 à partir d'un certain rang” :
- (vi) “on obtient une infinité de 6” :

Proposition 11

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

- (i) L'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si, et seulement si, tous les A_n sont réalisés.
- (ii) L'événement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si, et seulement si, au moins un A_n est réalisé.
- (iii) L'événement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{p=n}^{+\infty} A_p$ est réalisé si, et seulement si, tous les A_n sont réalisés à partir d'un certain rang.
- (iv) L'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$ est réalisé si, et seulement si, une infinité de A_n est réalisée.

2 Espaces probabilisés

2.1 Probabilité sur un espace probabilisable

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable fini ou dénombrable.

On appelle **loi de probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- (ii) Pour toute suite finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux-à-deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Cette propriété est appelée **l'axiome de σ -additivité**.

Pour tout événement A de $\mathcal{T}$, le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé la **probabilité** de l'événement A .

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Remarque 13 (σ -additivité pour une famille finie)

- Pour tout couple (A, B) d'événements disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- Pour toute suite finie $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'événements deux-à-deux disjoints, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition 14 (*Justification de la convergence de la définition 12*)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux-à-deux disjoints d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

Démonstration.

Exemple 15 (Univers fini)

Si Ω est un univers fini et non vide, l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ A &\mapsto \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \end{aligned}$$

est une loi de probabilité, appelée **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

On dit encore qu'on est en **situation d'équiprobabilité** car tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Remarque 16

Le modèle probabiliste (i.e. l'espace probabilisé) est généralement imposé par l'énoncé. Par exemple, la loi de probabilité associée à un lancer de dé non pipé est la loi de probabilité uniforme, ce qui n'est pas le cas lorsque le dé est pipé.

2.2 Propriétés des probabilités

Dans toute la suite, on se place - sauf mention contraire - dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Proposition 17 (*admise*)

Soient A et B deux événements.

- (i) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (en particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$).
- (ii) $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.
- (iii) si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- (iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Définition 18

Soit A un événement.

- (i) Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit alors que A est **certain presque-sûrement**, ou **presque-sûr**.
- (ii) Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit alors que A est **négligeable**.

Remarque 19 (Attention!)

| Il faut distinguer les événements de probabilité nulle (resp. égale à 1) de l'événement impossible $\emptyset$ (resp. Ω).

Exemple 20 ♡ (Événements possibles de probabilité nulle - événements non certains de probabilité 1)

|| On répète un tirage de pile ou face d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. Montrons de deux façons différentes que la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est égale à 0 (on dit aussi que le jeu le jeu s'arrête presque-sûrement), alors que l'événement "on obtient face à chaque tirage" est réalisable.

Théorème 21 (*admise*)

Soit $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un univers dénombrable et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n$ converge et a pour somme 1, il existe une seule et unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n.$$

Remarque 22

Le résultat précédent implique qu'il est impossible de choisir **de manière équiprobable** un entier naturel.

3 Probabilités conditionnelles**3.1 Définition****Définition 23**

Soit A un événement de probabilité non nulle et soit B un événement quelconque.

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** le réel $\mathbb{P}_A(B)$, encore noté $\mathbb{P}(B|A)$, défini par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque 24 (Attention !)

La notation " $B|A$ " ne désigne pas un événement ! Ce n'est qu'une notation qui n'a de sens que lorsqu'elle est utilisée avec une probabilité !

3.2 Propriétés**Remarque 25 (Convention d'écriture)**

Remarquons que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$ si $\mathbb{P}(A) \neq 0$

Supposons que $\mathbb{P}(A) = 0$. Puisque $A \cap B \subset A$, on en déduit que $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. On convient alors d'écrire que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$, même si $\mathbb{P}_A(B)$ n'existe pas.

Théorème 26 (*admis*)

Soit A un événement de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_A : & \mathcal{T} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ & B & \mapsto \mathbb{P}_A(B) \end{array}$$

est une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$, appelée **loi de probabilité sachant A** .

Proposition 27

Pour tous événements A, B et C , avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a :

- (i) $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$
- (ii) $\mathbb{P}_A(B \setminus C) = \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$
- (iii) $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$.

Démonstration. $\mathbb{P}_A$ est une loi de probabilité.

4 Grands théorèmes de probabilités

4.1 Formule des probabilités totales

Définition 28

On appelle **système complet d'événements** toute suite $(A_i)_{i \in I}$ - finie ou dénombrable - d'événements vérifiant :

(i) Les événements sont deux-à-deux disjoints :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

(ii) Leur réunion égale l'univers :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.$$

Définition 29

On appelle **système quasi-complet d'événements** toute suite $(A_i)_{i \in I}$ - finie ou dénombrable - d'événements deux-à-deux disjoints vérifiant :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Remarque 30

Un système complet d'événements est quasi-complet. En effet, la proposition 14 assure que si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements dénombrables, alors la série $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ converge.

De plus, que le système complet soit fini ou dénombrable, $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Théorème 31 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements et soit B un événement. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B). \end{aligned}$$

Remarque 32 (Utilisation de la formule des probabilités totales)

On applique la formule des probabilités totales lorsqu'on cherche à déterminer la probabilité d'un événement B mais qu'on ne sait décrire cet événement par disjonction de cas : si A_1 est réalisé, si A_2 est réalisé, etc, et que cette famille $(A_i)_{i \in I}$ décrit l'univers (ou presque).

Exemple 33

On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6. Pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, l'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé. Déterminons la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Exemple 34

Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré : s'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation. On admet qu'il est presque sûr que le joueur fera un six. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

4.2 Formule des probabilités composées**Proposition 35 (*Formule des probabilités composées (admise)*)**

Soient $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque 36

La formule des probabilités composées s'utilise par exemple lorsqu'on tire **successivement** et **sans remise** des boules dans une urne.

Exemple 37

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne. Montrons que la probabilité qu'une boule rouge figure dans ce tirage est égale à $1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

4.3 Formule de Bayes

Théorème 38 (*Formule de Bayes*)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements et soit B un événement de probabilité non nulle. Alors :

$$\forall i \in I, \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}.$$

Démonstration.

Remarque 39

La formule de Bayes ne doit absolument pas être apprise, il faut savoir la retrouver via sa démonstration. Cette formule est utilisée pour *inverser* le conditionnement entre *causes* et *conséquences*.

Exemple 40

Un élève vient au lycée une fois sur deux en RER, deux fois sur cinq en voiture, et en vélo dans les autres cas. Lorsqu'il vient en RER, il a une probabilité de 0,6 d'être en retard, lorsqu'il vient en vélo, il a une probabilité de 0,2 d'être en retard, et lorsqu'il vient en voiture, il a une probabilité de 0,2 d'être en retard. Il est arrivé en retard aujourd'hui. Qu'elle est la probabilité qu'on puisse imputer son retard à la SNCF ?

5 Indépendance d'événements

5.1 Indépendance de deux événements

Définition 41

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** (pour la probabilité P) si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Remarque 42

- L'indépendance de deux événements n'est en général pas démontrable, elle résulte en général du choix (ou d'une conséquence) de la modélisation probabiliste d'une expérience aléatoire.
- Dans le cas où $\mathbb{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
- Attention à ne pas confondre l'incompatibilité (on préférera parler de “disjonction” et l'indépendance de deux événements ! On pourra par exemple vérifier que deux événements disjoints et de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants...

Proposition 43 (*admise*)

Soient A et B deux événements indépendants (pour une probabilité $\mathbb{P}$). Alors les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$), de même que les événements $\overline{A}$ et B , et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

5.2 Indépendance d'une famille d'événements

Définition 44

On dit que les événements d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ sont :

- **deux-à-deux indépendants** si, pour tout i et j dans I tels que $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants, i.e. :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

- **mutuellement indépendants** si, pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

Remarque 45

L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux-à-deux (il suffit de choisir $J = \{i, j\}$) mais la réciproque est fautive à partir d'une famille à trois événements.

Exemple 46

On lance deux dés discernables et on considère les événements A : “le premier dé lancé donne un résultat pair”, B : “le second dé lancé donne un résultat pair” et C : “la somme des deux dés est un résultat pair”. Les événements A , B et C sont deux-à-deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

En effet $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ mais $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$.

Proposition 47 (*admise*)

Soient $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements mutuellement indépendants.

- On obtient encore une famille d'événements mutuellement indépendants en remplaçant un nombre quelconque des A_k par leurs complémentaires.
- Chacun des événements A_k est indépendant de tout événement B pouvant s'écrire sous la forme de réunions et d'intersections des autres événements de la famille.