## Probabilités sur un univers fini

**Exercice 1.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

Un fumeur décide d'arrêter de fumer (au jour 1). S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est de $0,3$. En revanche, s'il succombe ce jour-là, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $0,9$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n$ l'événement "la personne fume le $n$- ème jour" et $p_n = \mathbb{P}(\overline{F_n})$.

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique. Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le $n$-ème jour ($n \in \mathbb{N}^*$), en supposant qu'il ne fume pas le premier jour ?

**Exercice 2. Dénombrement** ♡ [Corrigé] ★★☆

Déterminer la probabilité qu'une main de 5 cartes au poker (jeu de 52 cartes) contienne au moins (respectivement exactement) :

(i) une paire (deux cartes de même hauteur)

(ii) une double paire (deux paires distinctes)

(iii) un brelan (trois cartes de même hauteur)

(iv) un carré (quatre cartes de même hauteur)

(v) un full (brelan + paire).

**Exercice 3. Paradoxe des anniversaires** [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer la probabilité qu'au moins deux élèves d'une classe de $n$ élèves aient la même date d'anniversaire.

   *On supposera toutes les années non bissextiles : prendre en compte un tel phénomène serait coûteux en raisonnement mais ne modifierait que très peu les résultats.*

2. Écrire une fonction en `Python` qui renvoie le nombre minimum d'élèves nécessaire pour que cette probabilité dépasse une probabilité $p$ passée en argument.

   *On testera avec $p = 0,5$ et $p = 0,9$.*

**Exercice 4. Paradoxe des maladies rares** ♡ [Corrigé] ★★☆

Une maladie rare touche un individu sur 10000. Un laboratoire propose un test de dépistage de cette maladie. Des tests randomisés ont permis d'établir que :

- lorsque l'individu est sain, le test est négatif dans $99,9\%$ des cas,
- lorsque l'individu est malade, le test est positif dans $99\%$ des cas.

Peut-on avoir confiance en ce test ? Dans quelle(s) mesure(s) ?

**Exercice 5.** [Corrigé] ★★★

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance $n$ fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. Démontrer que les événements $A_n$ : "on obtient au plus un pile" et $B_n$ : "on obtient au moins un pile et un face" sont indépendants si, et seulement si, $n = 3$.

**Exercice 6. Monty Hall Problem** [Corrigé] ★★★

Sonia joue à un jeu télévisé. Corinne, l'animatrice du jeu, lui propose de choisir trois portes derrière lesquelles il y a respectivement deux chèvres et un voiture. Sonia choisit l'une des portes sans l'ouvrir. Corinne regarde alors derrière les deux autres portes restantes et ouvre celle derrière laquelle se trouve une chèvre. Sonia a alors l'ultime de chance de changer d'avis pour gagner la voiture.

Devrait-elle ouvrir la porte choisie ou bien devrait-elle revenir sur son choix ?

## Probabilités sur un univers dénombrable

**Exercice 7.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$.

**Exercice 8.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

On dispose d'une infinité d'urnes numérotées, de telle sorte que l'urne numérotée $k \in \mathbb{N}^*$ soit constituée de $3^k$ boules (indiscernables au toucher) dont une seule blanche. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'urne $k$ soit choisie avec la probabilité $\dfrac{2}{3^k}$. Vérifier qu'il est presque-sûr de choisir une urne puis déterminer la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne choisie.

**Exercice 9.** [Corrigé] ★★☆

On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce et on suit le protocole suivant :

- si on obtient "face", on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient "pile", on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

On admettra que, pour tout $x \in ]-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et sa somme vaut $-\ln(1-x)$.

1. Montrer que l'expérience s'arrête presque-sûrement.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

**Exercice 10.** ♡ [Corrigé] ★★☆

Dans une population, la probabilité $p_n$ qu'une famille ait $n$ enfants ($n \in \mathbb{N}$) est égale à :

$$p_n = a\frac{2^n}{n!} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Déterminer la valeur du réel $a$.

2. On suppose qu'il est équiprobable d'obtenir un garçon ou une fille.

   a. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.

   b. On suppose qu'une famille a exactement un garçon.
   Quelle est la probabilité que cette famille ait exactement deux enfants ?

**Exercice 11.** [Corrigé] ★★☆

Deux joueurs $A$ et $B$ jouent. Le joueur A lance deux fois une pièce équilibrée tandis que le joueur $B$ ne lance qu'une fois une pièce qui fait pile avec la probabilité $p$. Le gagnant est celui qui fait le plus de faces. Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?

2. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

3. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?

4. Existe-t-il un réel $p$ tel que le jeu soit équitable ? Qui a le plus de chance de gagner ?

**Exercice 12. Continuité monotone** [Corrigé] ★★★

1. a. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements (pour l'inclusion), i.e. vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}.$$

   (i) On pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ et $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ en fonction des événements de la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (ii) En déduire la propriété de **continuité croissante** :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

   b. Déduire de ce qui précède que, pour tout suite quelconque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

2. a. Montrer que, pour tout suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a la propriété de **continuité décroissante** :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

   b. Montrer que, pour tout suite quelconque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

3. On lance indéfiniment un dé équilibré. Montrer que l'événement “on n'obtient jamais de 6” est de probabilité nulle.

**Exercice 13.** [Corrigé] ★★★

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir “pile” est $p \in ]0,1[$.

1. Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de l'événement $A_n$ : “la séquence PF apparaît pour la première fois (dans cet ordre) aux lancers $n-1$ et $n$”.

2. Quelle est la probabilité de l'événement “la séquence PF apparait au moins une fois” ?

3. Quelle est la probabilité de l'événement “la séquence PP apparaît sans que la séquence PF ne soit apparue auparavant” ?