

Questions de cours

1. Énoncer le théorème de comparaison de séries à termes positifs.
2. Énoncer le principe de superposition pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exercice 1

1. Écrire en Python une fonction `indices_min` qui prend en argument une liste de nombres et la liste des indices du minimum de la liste.

Exemple : `indices_min([5,2,8,2,7,3,2,4])` devra renvoyer `[1,3,6]`.

2. Recopier et compléter le code de la fonction booléenne `tousdifférents` qui prend en argument une chaîne de caractères et qui renvoie `True` si tous les caractères de la chaîne sont différents, et `False` dans le cas contraire.

On veillera à ne pas comparer un caractère situé à l'indice `i` avec un caractère situé à l'indice `j` si on a déjà comparé le caractère à l'indice `j` avec le caractère à l'indice `i`.

```
def tousdifférents(ch):
    n = len(ch)
    for i in range(..., ...):
        car = ch[i]
        for j in range(..., ...):
            if car == ...:
                return ...
    return ...
```

Exercice 2

1. Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) : \forall t \in I, y'(t) = a(t)y(t).$$

- a. Donner, sans justification, les solutions de l'équation différentielle (E_1) .
- b. En déduire que si f est solution de (E_1) s'annulant sur I , alors f est la fonction nulle sur I .

2. Soient b une fonction continue sur un intervalle I , C une constante réelle et g une solution sur I de l'équation différentielle :

$$(E_2) : \forall t \in I, y'(t) = b(t)y(t)(y(t) - C).$$

- a. Montrer que $g - C$ est solution sur I de :

$$(E_3) : \forall t \in I, y'(t) = b(t)g(t)y(t).$$

- b. En déduire que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$, alors g est constante sur I .

Exercice 3

Soit λ un réel strictement positif.

1. Justifier l'existence de $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour tout réel x et en donner une expression simple.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\lambda(x-1)}$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

- a. Déterminer le signe de la fonction $g : x \mapsto xe^{-x} - 1$ sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que, si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$.

Indication : on pourra dériver deux fois la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - x$.

- c. Montrer que, si $\lambda > 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0, 1]$.

Indication : on pourra prouver que la dérivée de la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule sur $[0, 1]$ qu'en un seul point α dont on ne cherchera pas l'expression.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x)e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

1. a. Démontrer que f réalise une bijection strictement décroissante de $[0, 1]$ dans lui-même.
 b. En déduire que : $\forall x \in [0, 1], (1 - x)e^x \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. On fixe un réel α appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$ et on considère les deux suites ci-dessous définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n^{-\alpha} \text{ et } y_n = f(x_n)$$

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $\forall x \in [0, x_n], y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq (1 - x)e^x$.
- b. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n} = +\infty$
- c. Donner le développement limité de $\ln(1 - x)$ en 0 à l'ordre 3 et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^n = 1$.
3. On pose $I_n = \int_0^1 [(1 - x)e^x]^n dx$.

- a. Démontrer que :

$$y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx$$

- b. En utilisant un changement de variable simple, en déduire :

$$y_n^n \int_0^{x_n \sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq I_n \sqrt{n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

- c. **[5/2]** En utilisant une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, déduire de ce qui précède que :

$$I_n \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

* *

*