Exercice 1

1. Initialement, la plus petite valeur de la liste est à l'indice 0. On parcourt le reste des éléments de la liste (par indice). Si un élément lu est inférieur au minimum des valeurs déjà lues, on met-à-jour la variable **min** et la liste `indices`.

```python
def indices_min(L):
    mini = L[0]
    indices = [0]
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k] < mini:
            mini = L[k]
            indices = [k]
        elif L[k] == mini:
            indices.append(k)
    return indices
```

2. L'idée ici est de lire chaque caractère de la chaîne (sauf le dernier) et de vérifier s'il se répète plus loin dans la chaîne.

```python
def tousdifferents(ch):
    n = len(ch)
    for i in range(n-1):
        car = ch[i]
        for j in range(i+1,n):
            if car == ch[j]:
                return False
    return True
```

Exercice 2

1. a. On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. Notons A une primitive de a sur l'intervalle I. L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ke^{A(t)} \end{array}, K \in \mathbb{R} \right\}}.$$

   b. Soit f une solution de (E_1). Supposons que f s'annule en un point $t_0 \in I$. Ainsi $Ke^{A(t_0)} = 0$. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas, $K = 0$ et ainsi f est la fonction nulle sur I.
   On en déduit que, <u>si f est solution de (E_1) s'annulant sur I, alors f est la fonction nulle sur I</u>.

2. a. Notons h la fonction $h = g - C$. La fonction h est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\ h'(t) = g'(t) = b(t)g(t)(g(t) - C) = b(t)g(t)h(t).$$

   On en déduit que <u>$g - C$ est bien solution de (E_3)</u>.

   b. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$. On en déduit que la fonction h s'annule (en t_0). Puisqu'elle est solution de (E_3), qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 (la fonction $t \mapsto b(t)g(t)$ est continue sur I), la fonction h est nulle sur I, i.e. <u>g est constante sur I</u> (égale à C).

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la série exponentielle $\sum_{k \in \infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$ converge et a pour somme $e^{\lambda x}$, la série $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^k}{k!} e^{-\lambda}$ converge par linéarité et a pour somme :

$$\boxed{S(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.}$$

2. a. La fonction g est dérivable par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

   On en déduit immédiatement le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-1} - 1$	$\searrow$	-1

   La fonction g admet un maximum sur $\mathbb{R}$ égal à $e^{-1} - 1 < 0$.
   On en déduit que <u>g est strictement négative sur $\mathbb{R}$</u>.

b. Supposons que $\lambda \leqslant 1$. La fonction ϕ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in [0,1],\ \phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$$
$$\phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0.$$

On en déduit que la fonction ϕ' est strictement croissante sur $[0,1]$. Puisque $\phi'(1) = \lambda - 1 \leqslant 0$, la fonction ϕ' est strictement négative sur $[0,1[$ et ainsi ϕ est strictement décroissante sur $[0,1]$ (par continuité de ϕ en 1). On remarque que $\phi(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1[$ et $\phi(1) = 0$. Ainsi l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0,1]$: $x = 1$.

c. Supposons que $\lambda > 1$.

D'après le résultat de la question précédente, la fonction ϕ' est strictement croissante sur $[0,1]$. Puisque ϕ' est continue sur $[0,1]$, elle réalise une bijection entre $[0,1]$ et $[\phi'(0), \phi'(1)] = [\lambda e^{-\lambda} - 1, \lambda - 1]$. Remarquons que $\lambda - 1 > 0$ et $\lambda e^{-\lambda} - 1 < 0$ d'après la question 2.a. Ainsi, la fonction ϕ' s'annule en un unique $\alpha \in [0,1]$. On en déduit les variations de la fonction ϕ qu'on présente dans le tableau ci-dessous :

x	0	α	1
$\phi(x)$	e^{-1} $\searrow$	$\phi(\alpha)$	$\nearrow$ 0

Remarquons que $\phi(\alpha) < 0$ et que la fonction ϕ s'annule une unique fois sur $[\alpha, 1]$. Puisque la fonction ϕ est continue et strictement décroissante sur $[0, \alpha]$, elle réalise une bijection entre $[0, \alpha]$ et $[\phi(\alpha), e^{-1}]$. Puisque $\phi(\alpha) < 0$, la fonction ϕ s'annule une unique fois sur $[0, \alpha[$.

On en déduit que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0,1]$.

Exercice 4

1. a. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall x \in]0,1],\ f'(x) = -e^{x+\frac{x^2}{2}} + (1-x^2)e^{x+\frac{x^2}{2}} = -x^2 e^{x+\frac{x^2}{2}} < 0.$$

La fonction f est donc strictement décroissante (et continue) sur $[0,1]$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[f(1), f(0)] = [0,1]$.

b. On en déduit en particulier que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}} \leqslant f(0) = 1,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], (1-x)e^x \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

2. a. Remarquons que $x_n \in [0,1]$. Par décroissance de f sur $[0, x_n]$, on trouve que :

$$\forall x \in [0, x_n],\ y_n = f(x_n) \leqslant f(x) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in [0, x_n], \quad y_n e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant (1-x)e^x.}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n\sqrt{n} = n^{-\alpha+\frac{1}{2}}$. Puisque $-\alpha + \dfrac{1}{2} > 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\sqrt{n} = +\infty.}$

c. Puisque

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_{u\to 0}\left(u^3\right)$$

et puisque $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, on obtient (par composition de limites, le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\left(x^3\right).$$

Remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln\left(y_n^n\right) = \ln(1-x_n) + x_n + \frac{x_n^2}{2} = -\frac{x_n^3}{3} + o_{n\to+\infty}\left(x_n^3\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(y_n^n\right) = 0$ et ainsi que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n^n = 1.}$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.a (et par positivité des deux termes de l'inégalité), on a :

$$\forall x \in [0, x_n],\ y_n^n e^{-\frac{nx^2}{2}} \leqslant \left[(1-x)e^x\right]^n.$$

Par croissance de l'intégrale $(0 < x_n)$, on trouve que :

$$y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{x_n} \left[(1-x)e^x\right]^n \mathrm{d}x \leqslant I_n,$$

la dernière inégalité étant obtenue car la fonction $(x \mapsto (1-x)e^x)$ est positive sur $[x_n, 1]$ (donc son intégrale aussi).

D'autre part, la question 1.b garantit que :

$$\forall x \in [0,1],\ [(1-x)e^x] \leqslant e^{-\frac{nx^2}{2}}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, on trouve que :

$$I_n \leqslant \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi :

$$y_n^n \int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $(x \mapsto \sqrt{n}x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (et donc sur $[0,x_n]$). En posant $u = \sqrt{n}x$, on obtient $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\,\mathrm{d}x$. D'après le théorème de changement de variable, on obtient :

$$\int_0^{x_n} e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

On trouve bien que :

$$\boxed{y_n^n \int_0^{x_n\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leqslant I_n\sqrt{n} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.}$$

c. On rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$. On en déduit que les deux membres extérieurs de l'encadrement convergent vers la même limite, égale à $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. Puisque la fonction $\left(x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ est paire sur $\mathbb{R}$, $J = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.}$

*   *

*