1 Nombres complexes

Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Soit $z \neq 1$ un nombre complexe. On pose $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$. Établir les propriétés suivantes :

1. $|z'| = 1$
2. $\dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$
3. $\dfrac{z'+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 3. Formule du parallélogramme ♡ [Corrigé] ★☆☆

Montrer la proposition suivante :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2,\ |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right).$$

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 5. Racine septième de l'unité [Corrigé] ★★☆

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer z^7.
2. Vérifier que u et v sont des nombres complexes conjugués.
3. Montrer que que $\mathrm{Im}(u) > 0$. *On pourra s'aider du cercle trigonométrique.*
4. Calculer $u+v$ (on pourra commencer par $1+u+v$) puis uv.
5. En déduire une expression de u, v puis montrer que :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 6. Calculs de sommes [Corrigé] ★★☆

1. Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et des réels a et θ :

   a. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+k\theta)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a+k\theta)$

   b. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$

   c. $S_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$,

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ une racine n-ème de l'unité, i.e. $\omega^n = 1$. On suppose ici que $\omega \neq 1$. Calculer les sommes suivantes :

   a. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega^k$,

   b. $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k$,

   c. $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^{pk}$,

   d. $D = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$,

Exercice 7. [Corrigé] ★★★

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer le module et un argument du complexe $1 + e^{i\theta}$.

On pourra interpréter géométriquement cette somme.

2 Polynômes

Exercice 8. [Corrigé] ★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les polynômes :

1. $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$
2. $Q_n = (X^3 + X^2 + X + 1) \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 0 n'est pas racine du polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10. [Corrigé] ★★☆

Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ divisibles par $X^2 + X + 1$.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 4 tel que $P + 10$ soit divisible par $(X-2)^2$ et $P - 12$ soit divisible par $(X+2)^3$.

Exercice 12. ♡ [Corrigé] ★★☆

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Q_1 = (X-1)^2$ divise le polynôme :
$$P_1 = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q_2 = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ divise le polynôme
$$P_2 = \sin(\theta)X^n - \sin(n\theta)X + \sin\big((n-1)\theta\big).$$

Exercice 13. Relations coefficients/racines ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$. Soient a, b et c les trois racines complexes (non nécessairement distinctes) du polynôme $P = X^3 + pX^2 + qX + r$.

1. a. Exprimer $a^2 + b^2 + c^2$ en fonction de p et q.
   b. On suppose ici que $r \neq 0$. Justifier que a, b et c sont non nuls puis montrer que :
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{q}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{q^2 - 2pr}{r^2}.$$
2. Déterminer l'unique polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1 dont les racines sont exactement a^2, b^2 et c^2 (on déterminera ses coefficients en fonction de p, q et r). Le polynôme Q appartient-il à $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$$
2. Déterminer les racines du polynôme $P = (X+1)^n - 1$.
3. En déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 15. Polynômes de Tchebychev [Corrigé] ★★★

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
   Les polynômes T_n sont appelés **polynômes de Tchebychev de première espèce**.
   Indication : on exprimera $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme U_n tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta).$$
   Les polynômes U_n sont appelés **polynômes de Tchebychev de seconde espèce**.
3. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \times \dfrac{1}{n} T_n'(\cos\theta) = \sin(n\theta)$.
   b. En déduire une expression de U_n en fonction de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 et U_0, U_1, U_2, U_3, U_4.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, le coefficient dominant et le degré de T_n.
7. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n a la parité de n.
   b. En déduire la parité de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
   b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $T_{2n+1}(0)$ et $T_{2n}(0)$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n vérifie l'équation différentielle :
$$(E_n) : (1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0.$$
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    a. Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
    b. En déduire que T_n admet exactement n racines (à déterminer) dans l'intervalle $]-1;1[$.
    c. En déduire une factorisation de T_n.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer les relation suivantes :
    a. $\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, b. $\forall x \in]-1, 1[,\ U_n(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$.