1 Nombres complexes

Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Soit $z \neq 1$ un nombre complexe. On pose $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$. Établir les propriétés suivantes :

1. $|z'| = 1$
2. $\dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$
3. $\dfrac{z'+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 3. Formule du parallélogramme ♡ [Corrigé] ★☆☆

Montrer la proposition suivante :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2,\ |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right).$$

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 5. Racine septième de l'unité [Corrigé] ★★☆

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer z^7.
2. Vérifier que u et v sont des nombres complexes conjugués.
3. Montrer que que $\mathrm{Im}(u) > 0$. *On pourra s'aider du cercle trigonométrique.*
4. Calculer $u + v$ (on pourra commencer par $1 + u + v$) puis uv.
5. En déduire une expression de u, v puis montrer que :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 6. Calculs de sommes [Corrigé] ★★☆

1. Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et des réels a et θ :

   a. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a + k\theta)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a + k\theta)$

   b. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$

   c. $S_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$,

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ une racine n-ème de l'unité, i.e. $\omega^n = 1$. On suppose ici que $\omega \neq 1$. Calculer les sommes suivantes :

   a. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega^k$,

   b. $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k$,

   c. $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^{pk}$,

   d. $D = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$,

Exercice 7. [Corrigé] ★★★

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer le module et un argument du complexe $1 + e^{i\theta}$.
On pourra interpréter géométriquement cette somme.

2 Polynômes

Exercice 8. [Corrigé] ★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les polynômes :

1. $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$
2. $Q_n = (X^3 + X^2 + X + 1) \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 0 n'est pas racine du polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10. [Corrigé] ★★☆

Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ divisibles par $X^2 + X + 1$.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 4 tel que $P + 10$ soit divisible par $(X-2)^2$ et $P - 12$ soit divisible par $(X+2)^3$.

Exercice 12. ♡ [Corrigé] ★★☆

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Q_1 = (X-1)^2$ divise le polynôme :
$$P_1 = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q_2 = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ divise le polynôme
$$P_2 = \sin(\theta)X^n - \sin(n\theta)X + \sin\big((n-1)\theta\big).$$

Exercice 13. Relations coefficients/racines ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$. Soient a, b et c les trois racines complexes (non nécessairement distinctes) du polynôme $P = X^3 + pX^2 + qX + r$.

1. a. Exprimer $a^2 + b^2 + c^2$ en fonction de p et q.
   b. On suppose ici que $r \neq 0$. Justifier que a, b et c sont non nuls puis montrer que :
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{q}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{q^2 - 2pr}{r^2}.$$
2. Déterminer l'unique polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1 dont les racines sont exactement a^2, b^2 et c^2 (on déterminera ses coefficients en fonction de p, q et r). Le polynôme Q appartient-il à $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$$
2. Déterminer les racines du polynôme $P = (X+1)^n - 1$.
3. En déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 15. Polynômes de Tchebychev [Corrigé] ★★★

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme T_n tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
Les polynômes T_n sont appelés **polynômes de Tchebychev de première espèce**.
Indication : on exprimera $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme U_n tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta).$$
Les polynômes U_n sont appelés **polynômes de Tchebychev de seconde espèce**.
3. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \times \dfrac{1}{n} T_n'(\cos\theta) = \sin(n\theta)$.
   b. En déduire une expression de U_n en fonction de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 et U_0, U_1, U_2, U_3, U_4.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, le coefficient dominant et le degré de T_n.
7. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n a la parité de n.
   b. En déduire la parité de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
   b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $T_{2n+1}(0)$ et $T_{2n}(0)$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n vérifie l'équation différentielle :
$$(E_n) : (1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0.$$
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
   b. En déduire que T_n admet exactement n racines (à déterminer) dans l'intervalle $]-1;1[$.
   c. En déduire une factorisation de T_n.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer les relation suivantes :
   a. $\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos x)$,
   b. $\forall x \in]-1,1[,\ U_n(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

1. En remarquant que $z-1$ et $\overline{z}-1$ sont des complexes conjugués, il vient que :
$$|z'| = \left|\frac{z-1}{1-\overline{z}}\right| = \left|\frac{z-1}{\overline{z}-1}\right| = 1$$

2. On trouve après calculs que :
$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{z+\overline{z}-2}{(z-1)\,(1-\overline{z})} = -\frac{2\,\mathrm{Re}(z)-2}{|z-1|^2} \in \mathbb{R}.$$

3. On trouve après calculs que :
$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{z-\overline{z}}{(z-1)\,(1-\overline{z})} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2} \in i\mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]
En factorisant le numérateur et le dénominateur par leurs modules respectifs, on obtient :
$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} &= \left(\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)^{20}\\ &= \left(\sqrt{2}\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{4}}}\right)^{20}\\ &= 2^{10}\left(e^{\frac{7i\pi}{12}}\right)^{20}\\ &= 2^{10}e^{\frac{35\pi}{3}}\\ &= 2^{10}e^{i\left(6\times 2\pi-\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= 2^{10}e^{-\frac{i\pi}{3}}\\ &= 2^9-i2^9\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

$$\begin{aligned}\forall (u,v)\in\mathbb{C}^2,\ |u+v|^2+|u-v|^2 &= (u+v)\,(\overline{u}+\overline{v})-(u-v)\,(\overline{u}-\overline{v})\\ &= u\overline{u}+u\overline{v}+\overline{u}v+v\overline{v}+u\overline{u}-u\overline{v}-\overline{u}v+v\overline{v}\\ &= 2|u|^2+2|v|^2.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. On trouve immédiatement que l'équation $z^2+z+1=0$ admet deux solutions complexes conjuguées :
$$j = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ et } \overline{j} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

2. Posons $t=z^3$. Alors
$$z^6+z^3+1=0 \Leftrightarrow t^2+t+1=0 \Leftrightarrow t=e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ ou } t=e^{-\frac{i\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3=e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ ou } z^3=e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

   Puisque 0 n'est pas solution de $z^6+z^3+1=0$, toute solution z peut s'écrire sous forme exponentielle. Posons alors $z=re^{i\theta}$.
$$\begin{aligned}z^6+z^3+1=0 &\Leftrightarrow z^3=e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ ou } z^3=e^{-\frac{i\pi}{3}}\\ &\Leftrightarrow r^3e^{3i\theta}=e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ ou } r^3e^{3i\theta}=e^{-\frac{i\pi}{3}}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^3=1\\ 3\theta=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} r^3=1\\ 3\theta=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r=1\\ \theta=\frac{\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} r=1\\ \theta=-\frac{\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}\end{aligned}$$

   On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation $z^6+z^3+1=0$:
$$\left\{e^{\frac{i\pi}{9}}, e^{\frac{7i\pi}{9}}, e^{\frac{13i\pi}{9}}, e^{\frac{-i\pi}{9}}, e^{\frac{5i\pi}{9}}, e^{\frac{11i\pi}{9}}\right\}$$

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. On trouve immédiatement que $z^7=e^{2i\pi}=1$. On dit que z est une **racine septième de l'unité**.

2. Les nombres complexes u et v sont bien conjugués comme le montre le calcul ci-dessous :
$$\overline{v} = \overline{z^3+z^5+z^6} = e^{\frac{-6i\pi}{7}}+e^{\frac{-10i\pi}{7}}+e^{\frac{-12i\pi}{7}} = e^{\frac{8i\pi}{7}}+e^{\frac{4i\pi}{7}}+e^{\frac{2i\pi}{7}} = z^4+z^2+z = u.$$

3. Remarquons que :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(u) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}+\pi\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\\ &= \left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).\end{aligned}$$

Puisque la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$. Puisqu'elle est aussi positive sur $[0,\pi]$, $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$. Ainsi :

$$\operatorname{Im}(u) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0.$$

4. On reconnait ci-dessous une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$ et de premier terme égal à 1 :

$$1+u+v = 1+\left(z+z^2+z^4\right)+\left(z^3+z^5+z^6\right) = 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = \frac{1-z^7}{1-z} = 0.$$

On en déduit donc que $u+v=-1$. Calculons uv :

$$\begin{aligned}uv &= \left(z+z^2+z^4\right)\left(z^3+z^5+z^6\right)\\ &= z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10}\\ &= z^4+z^5+z^6+3z^7+zz^7+z^2z^7+z^3z^7\\ &= 2+\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

5. Les nombres complexes u et v sont racines du polynôme

$$(X-u)(X-v) = X^2-(u+v)X+uv = X^2+X+2.$$

Ce polynôme admet pour racines $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. Puisque $\operatorname{Im}(u)>0$, on en déduit que $u=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et donc que $v=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

On trouve alors que :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(z+z^2+z^4\right)\\ &= \operatorname{Im}(u)\\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. a. Posons $T_1 = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+k\theta)}$.

On aura remarqué que $S_1 = \operatorname{Re}(T_1)$ et $S_2 = \operatorname{Im}(T_1)$. L'objectif est donc d'écrire T_1 sous forme algébrique afin d'identifier S_1 et S_2.

On trouve que :

$$T_1 = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+k\theta)} = \sum_{k=0}^{n} e^{ia}e^{ik\theta} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k = \begin{cases}(n+1)e^{ia} & \text{si } e^{i\theta}=1\\ e^{ia}\dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} & \text{si } e^{i\theta}\neq 1.\end{cases}$$

Distinguons alors les cas.

- Si $e^{i\theta}=1$, i.e. $\theta = 0\ [2\pi]$, alors :

$$S_1 = \operatorname{Re}(T) = (n+1)\cos a \text{ et } S_2 = \operatorname{Im}(T) = (n+1)\sin a.$$

- Si $\theta = 0\ [2\pi]$, alors :

$$\begin{aligned}S_1 = \operatorname{Re}(T) &= \frac{\cos a - \cos(a-\theta)-\cos(a+(n+1)\theta)+\cos(a+n\theta)}{2-2\cos\theta}\\ S_2 = \operatorname{Im}(T) &= \frac{\sin a - \sin(a-\theta)-\sin(a+(n+1)\theta)+\sin(a+n\theta)}{2-2\cos\theta}.\end{aligned}$$

b. Après avoir linéarisé $\cos^2(k\theta)$ et $\sin^2(k\theta)$, on trouve :

$$\cos^2(k\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2k\theta)\right) \quad \text{et} \quad \sin^2(k\theta) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2k\theta)\right).$$

On en déduit alors les expressions de S_3 et S_4 :

$$\begin{aligned}S_3 &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\cos(2k\theta)\right) = \frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)\\ S_4 &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(1-\cos(2k\theta)\right) = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta).\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de S_1 (avec $a=0$) en fonction de θ et en remplaçant θ par 2θ, on trouve la valeur de S_3 et S_4 en distinguant les cas :

- Si $\theta = 0\ [\pi]$, alors :

$$S_3 = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+1$$
$$S_4 = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2} = 0.$$

- Si $\theta \neq 0\ [\pi]$, alors :

$$S_3 = \frac{n+1}{2} + \frac{1-\cos(2\theta)-\cos(2(n+1)\theta)+\cos(2n\theta)}{4-4\cos(2\theta)}$$
$$S_4 = \frac{n+1}{2} - \frac{1-\cos(2\theta)-\cos(2(n+1)\theta)+\cos(2n\theta)}{4-4\cos(2\theta)}.$$

c. Posons $T_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta}$ en remarquant que $S_5 = \mathrm{Re}(S')$ et $S_6 = \mathrm{Im}(S')$. Déterminons la forme algébrique de T_2 afin d'identifier S_5 et S_6 :

$$T_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k 1^{n-k} = (e^{i\theta}+1)^n.$$

D'après l'exercice 7, $e^{i\theta}+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi :

$$T_2 = \left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

On en déduit alors S_5 et S_6 :

$$S_5 = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \text{ et } S_6 = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ une racine n-ème de l'unité, i.e. $\omega^n = 1$. On suppose ici que $\omega \neq 1$. Calculer les sommes suivantes :

a. En reconnaissant une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\omega \neq 1$ et de premier terme 1, on trouve que :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

b. On applique la formule du binôme de Newton :

$$B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k = (1+\omega)^n.$$

c. On reprend la même idée :

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{pk} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{pk} - \binom{n}{n} w^{pn} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (w^p)^k - (w^n)^p = (1+\omega^p)^n - 1$$

d. On considère la fonction polynômiale $f : x \mapsto \sum_{j=0}^{n} x^j$. Sa dérivée est la fonction :

$$f : x \mapsto \sum_{j=0}^{n} j x^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (j+1) x^j.$$

Remarquons alors que $D = f'(\omega)$. Puisque :

$$\forall x \neq 1,\ f(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

il vient que :

$$\forall x \neq 1,\ f'(x) = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}.$$

Puisque $\omega \neq 1$, on trouve que :

$$D = \frac{(n-1)\omega^n - n\omega^{n-1}+1}{(1-\omega)^2} = \frac{n(1-\omega^{n-1}}{(1-\omega)^2} = \frac{n(\omega-1)}{\omega(1-\omega)^2} = -\frac{n}{\omega(1-\omega)}.$$

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

On se donne un repère orthonormée $(O,\vec{j},\vec{k})$. Notons A le point d'affixe 1, B le point d'affixe $e^{i\theta}$, et C le point d'affixe $1+e^{i\theta}$. Remarquons que le quadrilatère $OACB$ est alors un parallélogramme. Cela nous permet de conjecturer que $\frac{\theta}{2}$ est un argument de $1+e^{i\theta}$ (faire un schéma pour s'en convaincre). On pense alors à factoriser $1+e^{i\theta}$ par $e^{\frac{i\theta}{2}}$:

$$1+e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{-i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Le module de $1+e^{i\theta}$ est donc $2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

On remarque que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ n'est la forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$ si, et seulement si, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$ (notre conjecture initiale n'était donc pas la bonne en toute généralité, mais elle nous a tout de même été très utile !) Distinguons alors deux cas :

- si $\theta \in [0, \pi]$, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$, $\left|1 + e^{i\theta}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et un argument de $1 + e^{i\theta}$ est $\dfrac{\theta}{2}$;
- si $\theta \in]\pi, 2\pi[$, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) < 0$, $\left|1 + e^{i\theta}\right| = -2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et un argument de $1+e^{i\theta}$ est $\dfrac{\theta}{2} + \pi$ car :

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}} = -e^{i\pi} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}} = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$

Exercice 8. [Corrigé] ★☆☆

1. Après calculs, on trouve que $P_0 = 1 + X$, $P_1 = 1 + X + X^2 + X^3$ et :
$$P_2 = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7.$$
On conjecture alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1} = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k,$$
ce qu'on peut démontrer sans problème par récurrence.
2. De même, un raisonnement par récurrence montrerait que :
$$Q_0 = X^3 + X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1.$$
Remarquons qu'il est nécessaire de distinguer le cas $n = 0$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $P_n(0) = 1$, 0 n'est pas racine du polynôme P_n.
Lors du calcul de $P_n(0)$, on pourrait être tenté d'écrire 0^0 mais cette notation n'est pas définie. Cette écriture résulte de l'évaluation de X^k en 0 lorsque $k = 0$. Le résultat n'est pas 0 mais bien 1 : on n'oubliera pas qu'on évaluera k avant X.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n admette une racine double qu'on notera a. On en déduit alors que $P(a) = P'(a) = 0$. Or :
$$P' = \sum_{k=0}^{n} k\frac{X^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{X^j}{(j)!} = P - \frac{X^n}{n!}.$$
Donc $0 = P'(a) = P(a) - \dfrac{a^n}{n!} = -\dfrac{a^n}{n!}$. On en déduit que $a^n = 0$, i.e. $a = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

Remarquons tout d'abord que $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Puisque $\overline{j} \neq j$, le polynôme $X^2 + X + 1$ divise P si, et seulement si, $(X - j)(X - \overline{j})$ divise P, i.e. si et seulement si $P(j) = P(\overline{j}) = 0$.

On rappelle que $j^3 = \overline{j}^3 = 1$, $j^2 = \overline{j}$ et $j + \overline{j} = 2\,\mathrm{Re}(j) = -1$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P(j) = 0 \\ P(\overline{j}) = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} j^4 + aj^2 + bj + c = 0 \\ \overline{j}^4 + a\overline{j}^2 + b\overline{j} + c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (b+1)j + a\overline{j} + c = 0 \\ aj + (b+1)\overline{j} + c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (b+1)j + a\overline{j} + c = 0 \\ [a - (b+1)]j + [(b+1) - a]\overline{j} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (b+1)j + a\overline{j} + c = 0 \\ [a - (b+1)]j = [a - (b+1)]\overline{j} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (b+1)j + a\overline{j} + c = 0 \\ a = b + 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a(j + \overline{j}) + c = 0 \\ a = b + 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = a - 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des polynômes P de $R[X]$ de la forme $X^4 + aX^2 + bX + c$ et divisibles par $X^2 + X + 1$ est donc :

$$\left\{X^4 + aX^2 + (a-1)X + a \in \mathbb{R}[X],\ a \in \mathbb{R}\right\}.$$

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 tel que $P + 10$ soit divisible par $(X-2)^2$ et $P - 12$ soit divisible par $(X+2)^3$.
Puisque, P est de degré inférieur ou égal à 4, le polynôme $P - 12$ l'est aussi. Or étant divisible par $(X+2)^3$, il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P - 12 = (aX + b)(X+2)^3$.
Ainsi, $P = (aX + b)(X+2)^3 + 12$.

Posons $R = P + 10 = (aX+b)(X+2)^3 + 22$. Alors $R' = a(X+2)^3 + 3(aX+b)(X+2)^2$. De plus, R est divisible par $(X-2)^2$ donc $R(2) = R'(2) = 0$.

$$\begin{cases} R(2) = 0 \\ R'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^3(2a+b) + 22 = 0 \\ 4^3 a + 3 \times 4^2(2a+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{33}{128} \\ b = -\frac{110}{128} \end{cases}$$

- Réciproquement, on peut s'assurer que le polynôme $P = \dfrac{11}{128}(3X-10)(X+2)^3 + 12$ vérifie bien les conditions.

On en déduit alors que $P = \dfrac{11}{128}(3X-10)(X+2)^3 + 12$ est l'unique polynôme vérifiant les conditions demandées.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

1. Calculons $P_1(1)$: $P_1(1) = n - (n+1) - 1 = 0$. Puisque $P_1' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$, $P_1'(1) = 0$ (on fera attention à bien distinguer le cas $n = 0$). Puisque $P_1(1) = P_1'(1) = 0$, 1 est racine multiple de P_1, qui est donc divisible par $Q_1 = (X-1)^2$.

2. Le polynôme Q_2 admet deux racines complexes, non nécessairement distinctes, $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. On peut alors factoriser Q_2 :

$$Q_2 = X^2 - 2\cos\theta X + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right).$$

Distinguons deux cas, selon que ces racines sont égales ou distinctes.

- Supposons que $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$, i.e. $\theta \neq 0$ $[\pi]$.

$$\begin{aligned} P_2\left(e^{i\theta}\right) &= \sin(\theta)e^{in\theta} - \sin(n\theta)e^{i\theta} + \sin\left((n-1)\theta\right) \\ &= \sin\theta\cos(n\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta) + \sin\left((n-1)\theta\right) \\ &= \sin(\theta - n\theta) + \sin\left((n-1)\theta\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $e^{i\theta}$ est une racine de P_2. Puisque P_2 est à coefficients réels, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ est aussi racine de P_2. Puisque $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$, $Q_2 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$ divise le polynôme P_2.

- Supposons que $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$, i.e. $\theta \neq 0$ $[\pi]$.
Dans ce cas, $\cos(\theta) = 1$ ou $\cos(\theta) = -1$, et $\sin(\theta) = \sin(n\theta) = \sin\left((n-1)\theta\right) = 0$. Ainsi $Q_2 = X^2 - 2X + 1$ ou $Q_2 = X^2 + 2X + 1$ et $P_2 = 0$. Ainsi, Q_2 divise le polynôme P_2 (puisque $P_2 = 0 \times Q_2$).

On a donc montré que, dans tous les cas, le polynôme Q_2 divise le polynôme P_2.

Corrigé de l'exercice 13. [Énoncé]

Soit $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$. Soient a, b et c les trois racines complexes (non nécessairement distinctes) du polynôme $P = X^3 + pX^2 + qX + r$.

1. a. Puisque a, b et c sont les racines du polynôme unitaire $P = X^3 + pX^2 + qX + r$, alors $P = (X-a)(X-b)(X-c)$. En développant, cette expression, on obtient :

$$P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc.$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} p = -(a+b+c) \\ q = ab+ac+bc \\ r = -abc \end{cases}$$

Donc $p^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = a^2+b^2+c^2+2q$. Ainsi :

$$a^2+b^2+c^2 = p^2 - 2q.$$

b. Puisque $r = -abc \neq= 0$, alors aucune des racines n'est nulle. Ainsi :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{q}{r}.$$

Remarquons que $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{(abc)^2}$. Or :

$$\begin{aligned} q^2 = (ab+ac+bc)^2 &= (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \\ &= (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2abc(a+b+c) \\ &= (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2pr. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{q^2 - 2pr}{r^2}.$$

2. Le polynôme Q s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} Q &= (X-a^2)(X-b^2)(X-c^2) \\ &= X^3 - \left(a^2+b^2+c^2\right)X^2 + \left((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2\right)X - (abc)^2 \\ &= X^3 - \left(p^2 - 2q\right)X^2 + \left(q^2 - 2pr\right)X - r^2. \end{aligned}$$

Puisque les coefficients p, q et r de P sont réels, les coefficients de Q sont eux aussi réels et ainsi $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Corrigé de l'exercice 14. [Énoncé]

1. En appliquant la formule d'Euler, on trouve :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left[e^{-\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)\right]\\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}}\left(\prod_{k=1}^{n-1}e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)\right)\\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}}\exp\left(-i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)\right)\\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}}e^{-\frac{i\pi(n-1)}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)\right)\\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}}(-i)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)\right)\end{aligned}$$

2. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. Posons $\beta=\alpha+1$. Remarquons que α est racine de P si, et seulement si :

$$(\alpha+1)^n=1\Leftrightarrow\beta^n=1$$

Puisque $0^n\neq1$, on peut écrire β sous forme exponentielle $\beta=re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta\in[0,2\pi[$. Ainsi, α est racine de P si, et seulement si :

$$\begin{aligned}\left(re^{i\theta}\right)^n=1 &\Leftrightarrow r^ne^{in\theta}=1e^{i0}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}r^n=1\\ n\theta=0\ [2\pi]\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\ \theta=0\ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right]\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\exists k\in[\![0,n]\!],\ \beta=e^{i\frac{2k\pi}{n}}\\ &\Leftrightarrow\exists k\in[\![0,n]\!],\ \alpha=e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1\end{aligned}$$

Le polynôme P admet donc n racines distinctes. Puisque P est de degré n, on a trouvé toutes les racines de P (et toutes ces racines sont simples).

3. Dans l'égalité de la question 1, on identifie le produit de toutes les racines non nulles de P. Or :

$$P=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)-1=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}X^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}X^{k+1}=XQ.$$

où $Q=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}X^k$. Le polynôme Q étant de degré $n-1$, ses racines sont donc exactement les réels $e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$, où $k\in[\![1;n-1]\!]$. Le polynôme P est un polynôme unitaire. Puisque $P=XQ$, Q est aussi un polynôme unitaire. Ainsi, le produit des racines de Q est égal, **à un signe près**, à son coefficient constant $Q(0)=n$:

$$n=Q(0)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(0-\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)\right)=(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right).$$

On obtient alors :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)=(-1)^{n-1}n.$$

Et enfin :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Corrigé de l'exercice 15. [Énoncé]

1. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^n\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta\right)\\ &= \sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}i^k\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}i^{2p}\cos^{n-2p}\theta\sin^{2p}\theta\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p\cos^{n-2p}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^p\end{aligned}$$

Le polynôme $T_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p X^{n-2p} \left(1-X^2\right)^p$ vérifie :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Montrons l'unicité du polynôme T_n. Soit S_n un autre polynôme vérifiant :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ S_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

Puisque $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, on en déduit que, pour tout $x \in [-1;1]$, $T_n(x) = S_n(x)$.

Le polynôme $T_n - S_n$ s'annule donc une infinité de fois sur l'intervalle $[-1;1]$. C'est donc nécessairement le polynôme nul, i.e. $T_n = S_n$, ce qui montre l'unicité du polynôme T_n.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
\sin(n\theta) &= \operatorname{Im}\left(e^{in\theta}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{k-1} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta\right) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} i^{k} \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} i^{2p} \cos^{n-2p-1}\theta \sin^{2p+1}\theta \\
&= \sin\theta \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-2p-1}\theta \left(1-\cos^2\theta\right)^p
\end{aligned}$$

Le polynôme : $U_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p X^{n-2p-1} \left(1-X^2\right)^p$, vérifie :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta).$$

Montrons l'unicité d'un tel polynôme.

Soit V_n un autre polynôme vérifiant la même relation que U_n, i.e. :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \times V_n(\cos\theta) = \sin(n\theta) = \sin\theta \times U_n(\cos\theta).$$

Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = V_n(\cos\theta)$.

Puisque $\cos(\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}) =]-1, 1[$, on en déduit que, pour tout $x \in]-1;1[$, $U_n(x) = V_n(x)$.

Le polynôme $U_n - V_n$ s'annule donc une infinité de fois sur l'intervalle $]-1;1[$. C'est donc nécessairement le polynôme nul, i.e. $U_n = V_n$, ce qui montre l'unicité du polynôme U_n.

3. a. D'après la question 1, on a :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

En dérivant cette égalité de fonctions sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta),$$

c'est-à-dire :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \left(\frac{1}{n} T_n\right)'(\cos\theta) = \sin(n\theta).$$

b. Par unicité du polynôme U_n, on trouve : $U = \dfrac{1}{n} T_n'$.

4. Après calculs, on trouve :
$$\begin{cases} T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_2 = 2X^2 - 1,\ T_3 = 4X^3 - 3X,\ T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \\ U_1 = 1,\ U_2 = 2X,\ U_3 = 4X^2 - 1,\ U_4 = 8X^3 - 6X \end{cases}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\theta) &= \cos\left((n+2)\theta\right) \\
&= \cos(n\theta + 2\theta) \\
&= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\
&= \cos(n\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin(n\theta)\sin\theta\cos\theta \\
&= 2\cos\theta\left(\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta\right) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos\theta\cos\left((n+1)\theta\right) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)
\end{aligned}$$

On en déduit que le polynôme $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n$ s'annule en tout point de $[-1;1]$. C'est donc le polynôme nul. Ainsi : $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

6. Il fallait d'abord traiter séparément le cas où $n = 0$: T_0 est de degré 0 et son coefficient dominant est 1.

Montrons, à l'aide d'une récurrence double, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le monôme de plus haut degré de T_n est $2^{n-1}X^n$.

La propriété est triviale pour $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que les monômes de plus haut degré de T_n et T_{n+1} soient respectivement $2^{n-1}X^n$ et $2^n X^{n+1}$.

Ainsi, $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$. Puisque $2XT_{n+1}$ et T_n n'ont pas le même degré, la différence $2XT_{n+1} - T_n$ est du degré de $2XT_{n+1}$, i.e. $n+2$.

Ainsi, son monôme de plus haut degré est celui de $2XT_{n+1}$, i.e. $2^{n+1}X^{n+2}$.

Puisque $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, on en déduit que le monôme de plus haut degré de T_{n+2} est $2^{n+1}X^{n+2}$, ce qui conclut la récurrence.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

7. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(-\cos\theta) = T_n(\cos(\theta+\pi))$. Or :

$$T_n(\cos(\theta+\pi)) = \cos(n(\theta+\pi)) = \cos(n\theta + n\pi) = (-1)^n \cos(n\theta) = (-1)^n T_n(\cos\theta).$$

On trouve alors : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(-\cos\theta) = (-1)^n T_n(\cos\theta)$.
Les polynômes $T_n(-X)$ et $(-1)^n T_n$ coïncident sur une infinité de valeurs (tous les réels de l'intervalle $[-1,1]$), ils sont donc égaux et : $\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n a la parité de n.

b. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \dfrac{T_n'}{n}$, on en déduit[1] que U_n a la parité contraire de n.

8. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \times 0) = 1$ et $T_n(-1) = T_n(\cos\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{2n+1}(0) = 0$ car T_{2n+1} est impaire.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $T_{2n}(0) = T_{2n}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

9. Soit $n \in N$. D'après la question 3, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta),$$

puis en dérivant cette égalité de fonctions par rapport à $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) = -n^2\cos(n\theta),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (1-\cos^2\theta) T_n''(\cos\theta) = -n^2 T_n(\cos\theta).$$

Puisque $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$, il vient que :

$$\forall x \in [-1,1],\ -xT_n'(x) + (1-x^2)T_n''(x) = -n^2 T_n(x).$$

Puisque $[-1,1]$ est infini, les polynômes $-XT_n' + (1-X^2)T_n''$ et $-n^2T_n$ sont égaux, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0\ (E_n).$$

10. a. Résolvons l'équation $\cos(n\theta) = 0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
Remarquons que cette équation n'admet aucune solution si $n = 0$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad n\theta = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right].\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(n\theta) = 0$ est donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b. Si $\theta \in S$, $\cos(n\theta) = 0$, i.e. $T_n(\cos\theta) = 0$, i.e. $\cos\theta$ est racine de T_n.
Considérons l'ensemble ci-dessous :

$$\begin{aligned}R &= \{\cos\theta,\ \theta \in S\}\\ &= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\\ &= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \quad \text{par } 2\pi\text{-périodicité de la fonction cos}\end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide la question 2, que chacune des valeurs de l'ensemble R sont des racines de T_n.

Notons, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$. Alors :

$$0 < \frac{\pi}{2n} = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi.$$

Par stricte décroissance de la fonction $(x \mapsto \cos x)$ sur $[0,\pi]$, on en déduit que :

$$1 > \cos\theta_0 > \cos\theta_1 > \cdots > \cos\theta_{n-1} > -1.$$

On a donc trouvé n racines (du polynôme T_n) deux-à-deux distinctes et dans l'intervalle $]-1,1[$. Puisque le polynôme T_n est de degré n, on a alors déterminé toutes les racines de T_n. On en déduit en particulier que ces racines sont simples.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n admet exactement n racines simples, toutes dans $]-1,1[$.
Remarquons que ce résultat est encore vrai pour $n = 0$.

[1] À connaître et savoir redémontrer : la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire.

c. On connait toutes les racines de T_n et le coefficient dominant de T_n d'après la question 6. On peut donc factoriser T_n dans $\mathbb{C}[X]$:

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

11. a. Soit $x \in [-1,1]$. Notons $\theta = \arccos x$. On a alors $\theta \in [0,\pi]$ et $\cos\theta = x$.
Puisque $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right).$$

b. Soit $x \in]-1,1[$. Notons $\theta = \arccos x$. On a alors $\theta \in]0,\pi[$ et $\cos\theta = x$.
On a alors $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ puisque $\sin\theta > 0$.
D'après la définition de U_n, $\sin\theta\, U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$. Ainsi :

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}.$$

On en déduit alors :

$$\forall x \in]-1,1[,\ U_n(x) = \frac{\sin\left(n\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}.$$