Dans tout ce chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désignera l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on conviendra que $0^0 = 1$.

1 Généralités sur les polynômes

1.1 Définitions et notations

Définition 1

On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute *fonction* de la forme :

$$P: \begin{array}{ccl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \end{array}$$

où $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Notation 2 (*Écriture formelle des polynômes*)

En notant X l'application

$$X: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x, \end{array}$$

tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ peut s'écrire sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Remarque 3 (*Viens dans $\mathbb{C}$!*)

L'écriture formelle d'un polynôme permet de s'affranchir de la donnée des espaces de départ et d'arrivée : un polynôme à coefficients réels est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais peut aussi être vu comme une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ selon le contexte.
Par exemple le polynôme X^4+1 est un polynôme à coefficients réels, mais aussi à coefficients complexes. Lorsqu'on cherchera à déterminer ses racines et/ou le factoriser, on préférera le voir comme une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 4

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Si tous les coefficients de P sont nuls, i.e. $a_0 = \cdots = a_n = 0$, on dit que P est le **polynôme nul** et on note $P = 0$. Par convention, le **degré du polynôme nul** est $-\infty$.
- Sinon, on appelle **degré** de P le plus grand entier naturel d tel que $a_d \neq 0$.

  Le coefficient a_d est appelé **coefficient dominant** de P, tandis que $a_d X^d$ est appelé le **monôme de plus haut degré** de P.

  On dit que P est **unitaire** si $a_d = 1$.

Remarque 5

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré d, alors $d \leqslant n$ et :

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

Remarque 6 (Erreur classique)

Un polynôme constant n'est pas nécessairement de degré 0.

Notation 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note :

- $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

1.2 Propriétés usuelles

Proposition 8

Un polynôme est la fonction nulle si, et seulement si, c'est le polynôme nul, i.e. tous ses coefficients sont nuls.

Démonstration admise.

Corollaire 9

Deux polynômes sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

Démonstration admise.

Proposition 10 (*Opérations élémentaires*)

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.

(ii) $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$

(iii) $PQ \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

(iv) $P \circ Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$.

Démonstration admise.

Remarque 11

Si P et Q sont deux polynômes de degrés distincts, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Remarque 12 (Structure vectorielle)

Toute combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ (resp. $\mathbb{K}[X]$) est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ (resp. $\mathbb{K}[X]$).
On dit que $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$ sont **stables par combinaisons linéaires**.

2 Factorisation et racines

2.1 Identités remarquables dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 13

(i) $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$

(ii) $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X - j)\left(X - \overline{j}\right)$ en notant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Démonstration.

2.2 Racine d'un polynôme

Définition 14

On dit qu'un scalaire $a \in \mathbb{K}$ est une **racine** d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si $P(a) = 0$.

Définition 15

On dit que le polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$ **divise** le polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Théorème 16 (*Caractérisation d'une racine*)

Un scalaire $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $(X - a)$ divise P.

Démonstration admise.

Corollaire 17 (*Généralisation à plusieurs racines*)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires **deux-à-deux distincts**.
Les scalaires $a_1, \dots, a_n$ sont des racines de P si et seulement si $(X - a_1) \dots (X - a_n)$ divise P.

Démonstration admise.

Exemple 18

Vérifier que 2 est une racine de $P = -6X^3 + 18X^2 - 18X + 12$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 19

Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Démonstration.

2.3 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 20

Soit P un polynôme non nul.
On appelle **ordre de multiplicité** d'une racine a de P le plus grand entier naturel m tel que $(X-a)^m$ divise P.
On dit que a est une **racine simple** de P si $m=1$ et une **racine multiple** si $m \geqslant 2$.

Exemple 21

Déterminer l'ordre de multiplicité de chacune des racines du polynôme $P = X^5 - 2X^4 + X^3$.

Théorème 22 (*Caractérisation des racines multiples*)

Un scalaire $a \in \mathbb{K}$ est une racine multiple d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

Démonstration.

Exemple 23

Étudier l'existence d'une éventuelle racine multiple du polynôme $P = 3X^3 - 9X^2 + 12$ ainsi qu'une éventuelle factorisation.

Corollaire 24

(i) Tout polynôme (non nul) de degré $n \geqslant 0$ admet au plus n racines.

(ii) Tout polynôme admettant strictement plus de racines que son degré est le polynôme nul.

Démonstration.

Exemple 25

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) = k - k^2$.

2.4 Viens dans $\mathbb{C}$!

Proposition 26

Si un nombre complexe a est racine d'un un polynôme P à coefficients réels, alors $\overline{a}$ est aussi racine de P.

Démonstration.

Exemple 27

Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{4}}$ est racine de $P = X^3 + X^2 + \left(-1 - \sqrt{2}\right) X + 1 + \sqrt{2}$.
En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 28 (*Théorème de d'Alembert-Gauss*)

Tout polynôme **non constant** à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Démonstration admise.

Théorème 29 (*Factorisation dans* C[X])

Tout polynôme **non constant** $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme factorisée suivante :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{m_k}.$$

où :

- $\lambda \neq 0$ est le coefficient dominant de P.
- r est le nombre de racines distinctes $a_1, \dots, a_r$ de P, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$.

Démonstration admise.

Corollaire 30

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet exactement n racines, comptées avec multiplicité.

Démonstration admise.

Exemple 31

Vérifier que i est racine du polynôme $P = X^4 + 2X^3 + 6X^2 + 2X + 5$. En déduire une factorisation de P comme produit de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ puis une factorisation de P comme produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.