Dans tout ce chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1

On dit qu'un ensemble E est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ (on dit encore un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**) s'il est muni :

- d'une loi de composition interne généralement notée "+"

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

vérifiant :

(i) $\forall (x,y)\in E^2,\ x+y=y+x$ (*commutativité de la loi* $+$),
(ii) $\forall (x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$ (*associativité de la loi* $+$),
(iii) $\exists\ x_0\in E,\ \forall y\in E,\ x_0+y=y$ (*existence d'un élément neutre pour la loi* $+$).
Cet élément neutre (pour la loi $+$), généralement noté 0_E, est appelé **vecteur nul** de E.
(iv) $\forall x\in E,\ \exists\ !y\in E,\ x+y=y+x=0_E$ (*existence d'un opposé à tout vecteur*).
Pour tout $x\in E$, l'élément y est appelé **opposé** de x, et noté $-x$.

- d'une loi de composition externe généralement notée "."

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

vérifiant :

(i) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$ (*distributivité à gauche*),
(ii) $\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall (x,y)\in E^2,\ \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$ (*distributivité à droite*),
(iii) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ \lambda.(\mu.x)=(\lambda\mu).x$ (*associativité du produit dans* $\mathbb{K}$ *et de la loi* .),
(iv) $\forall x\in E,\ 1.x=x$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

Exemple 2

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Les ensembles de fonctions continues, dérivables, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Pour tout $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définition et caractérisation

Définition 3

On dit qu'un ensemble F est un **sous-espace vectoriel** d'un espace vectoriel E (sur $\mathbb{K}$) si l'ensemble F vérifie les propositions suivantes :

(i) $F \subset E$ et $0_E \in F$,

(ii) $\forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F$ (F est stable par la loi $+$),

(iii) $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.x \in F$ (F est stable par la loi $.$).

Exemple 4

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1 de la forme $y' = ay$ (où a est une fonction de classe $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables sur I.
- Le résultat est identique pour l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 de la forme $y'' + py' + qy = 0$ où $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 5 (*admise*)

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque 6

La plupart des espaces vectoriels considérés seront des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels connus. La propriété précédente permet alors de réduire le nombre d'hypothèses pour vérifier qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Théorème 7 (*Caractérisation des sous-espaces vectoriels (admise)*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si,

$$\begin{cases} F \subset E, \\ 0_E \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda.x + y \in F. \end{cases}$$

Exemple 8 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 9

L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P'(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$.

Exemple 10

L'ensemble F des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1.2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème 11 (*admis*)

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 12

Ce résultat se généralise à un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E.

Exemple 13

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n équations et p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

1.2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Proposition-Définition 14

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(e_1, \dots, e_n)$ et noté :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \;\middle|\; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Démonstration.

Remarque 15 (À retenir !)

$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Exemple 16

L'ensemble F ci-dessous est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemple 17

L'ensemble F ci-dessous est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications réelles définies sur $\mathbb{R}$.

$$F = \left\{ x \mapsto a\cos x + b\sin x + c \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

2 Dimension d'un espace vectoriel

2.1 Famille génératrice finie

Définition 18

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite **génératrice** si :

$$E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n),$$

i.e. si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exemple 19

La famille $\Big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\Big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 20

L'espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$ est engendré par la famille $(1, X, X^2, X^3)$.

2.2 Famille libre finie

Définition 21

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est dite **libre** si pour tout n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a l'implication suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0\right) \Rightarrow \Big(\forall k \in [\![1; n]\!],\ \lambda_k = 0\Big).$$

On dit aussi que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont **linéairement indépendants**.
Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée**.

Remarque 22

- Une famille d'un seul vecteur est libre si, et seulement s'il est non nul.
- Une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement s'ils sont non colinéaires.

  Ce résultat devient faux pour des familles d'au moins trois vecteurs.

  Par exemple, en posant $e_1 = (1, 1),\ e_2 = (-1, -2)$ et $e_3 = (0, 1)$, la famille (e_1, e_2, e_3) de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est liée (malgré le fait que ces vecteurs ne soient pas deux-à-deux colinéaires).

Proposition 23 (*admise*)

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs de la famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres de la famille.

Exemple 24

La famille $\Big(X^2, X(X-1), (X-1)^2\Big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 25 (♡)

Toute famille finie de polynômes non nuls, de degrés deux-à-deux distincts, est libre.

Démonstration.

2.3 Base d'un espace vectoriel

Définition 26

On dit qu'une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si cette famille est à la fois une famille libre et génératrice de l'espace vectoriel E.

Proposition-Définition 27 (*admise*)

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E si, et seulement si, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

Les vecteurs $\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n$ sont appelés les **composantes** du vecteur x dans cette même base.
Le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé **coordonnées** du vecteur x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Elles se notent généralement matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Remarque 28 (Attention !)

- Contrairement aux familles libres ou génératrices, l'ordre des vecteurs d'une base a son importance : on ne voudrait pas mélanger des coordonnées de vecteur !
- L'utilisation de la notation matricielle des coordonnées d'un vecteur dans une base doit s'effectuer uniquement lorsque cette base est clairement identifiée !

  Une fois de plus, attention donc aux changements de base : ils sont souvent sources d'erreurs !
- Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ n'est généralement pas égal à ses coordonnées !

  Le vecteur $u = (3, 1, 6) \in \mathbb{R}^3$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\Big((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\Big)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 29

Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^\infty$ des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 12y = 0$.

Exemple 30 (Bases canoniques à connaitre)

- La famille de vecteurs $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ définie par :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad , e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{k-ème place}}, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad , e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

  est la **base canonique** de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.
- La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est la **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ remplie de 0 sauf à la i-ème ligne, j-ème colonne où elle contient 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2.4 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 31

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie**, s'il admet une famille génératrice finie.

Exemple 32

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.
- L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Théorème 33 (*admis*)

(i) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient $\mathcal{L}$ une famille libre, $\mathcal{G}$ une famille génératrice et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :

$$\operatorname{card}\mathcal{L} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{B} \leqslant \operatorname{card}\mathcal{G}.$$

(ii) Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal (i.e. même nombre de vecteurs), appelé **dimension** de l'espace vectoriel et noté $\dim E$ (parfois $\dim_{\mathbb{K}} E$).

Proposition 34 (*Familles libres, familles génératrices, bases et dimension (admis)*)

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

(i) Toute famille libre possède au plus n vecteurs.

(ii) Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.

(iii) Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.

(iv) Toute famille d'au plus $n-1$ vecteurs n'est pas génératrice.

Théorème 35 (*Théorème de la base incomplète (admis)*)

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base.

Théorème 36 (*admis*)

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on peut extraire une base de toute famille génératrice.

Théorème 37 (♡)

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E.

(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E et $\operatorname{card}\mathcal{F} = \dim E$,

(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et et $\operatorname{card}\mathcal{F} = \dim E$.

Démonstration.

Exemple 38 (Dimension des espaces vectoriels usuels ♡)

(i) $\dim \mathbb{K}^n = n$

(ii) $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$

(iii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

(iv) $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

(v) $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont des espaces vectoriels de dimension infinie.

Proposition 39 (*admise*)

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, il y a égalité si, et seulement si $E = F$.

Définition 40

Soit E un espace de dimension finie n. Dans E, on appelle :

- **droite** tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
- **plan** tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
- **hyperplan** tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

2.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 41

Soit E un espace vectoriel.
On appelle **rang** d'une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ de E la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ engendré par cette famille. On note :

$$\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Proposition 42

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
On a alors les résultats suivants :

(i) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant p$, avec égalité si, et seulement si, $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre.

(ii) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant n$, avec égalité si, et seulement si, $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de E.

Démonstration.

Proposition 43 (*Invariance du rang par les opérations élémentaires (admise)*)

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$.
On a alors les résultats suivants :

(i) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p) = \mathrm{rg}\,(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1} \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p)$.

(ii) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p) = \mathrm{rg}\,(u_1, \dots, u_{p-1}, \lambda u_p)$.

(iii) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p) = \mathrm{rg}\left(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k\right)$.

Remarque 44 (À retenir)

Le rang d'une famille est conservé lorsqu'on effectue les opérations élémentaires suivantes :

- permutation de deux vecteurs,
- multiplication d'un vecteur par un scalaire **non nul**,
- ajout à l'un des vecteurs d'une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Le rang peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base, à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.

Exemple 45

Considérons les cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (-1,2,0,1),\ u_3 = (3,2,-1,-3),\ u_4 = (3,5,0,-1) \text{ et } u_5 = (3,8,1,1).$$

On a : $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = 3$.

Exemple 46

Montrons successivement que le rang de la famille $\mathcal{F} = (X-1, X+1, X^2+1)$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifie :

(i) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \geqslant 1$ (ii) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant 3$ (iii) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \geqslant 2$ (iv) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3$.