Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer, dans chaque cas, si l'ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Justifier.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$$
$$C = \{(x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \quad D = \{(1+x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2. [Corrigé] ★☆☆

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-2i & 0 \\ -i & 1 & 1+i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & i & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Montrer que $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AM = MB\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3. [Corrigé] ★☆☆

Montrer que l'ensemble :

$$E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_n = 0\}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 4. [Corrigé] ★★☆

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère deux vecteurs $x = (1,-1,1)$ et $y = (0,1,a)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le vecteur $u = (1,1,2)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(x,y)$.
2. Dans ce cas, comparer alors $\mathrm{Vect}(x,y)$, $\mathrm{Vect}(u,x)$ et $\mathrm{Vect}(u,y)$.

Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 5. [Corrigé] ★☆☆

Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$? Dans le cas contraire, établir une relation linéaire liant les vecteurs de la famille, puis en extraire une famille libre.

1. $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-2,-1)$ et $u_3 = (1,4,3)$.
2. $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (1,1,1)$.
3. $\mathcal{B}_3 = (t_1, t_2, t_3)$ où $t_1 = (1,2,1)$, $t_2 = (2,1,-1)$ et $t_3 = (1,-1,-2)$.

Exercice 6. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ où $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,1)$.
2. $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ où $u = (-1,1,0)$, $v = (2,0,1)$ et $w = (1,1,1)$.
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 7. [Corrigé] ★☆☆

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 8. [Corrigé] ★★☆

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, x+y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Déterminer une base de F, de G et de $F \cap G$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

On considère le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que les ensembles suivants :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ MU = \lambda U\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix},\ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.
3. Déterminer une base de $E \cap F$.

Exercice 10. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E.

Montrer que si la famille $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est génératrice de E et $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit F_λ l'ensemble des solutions (x, y, z, t) du système :

$$\begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 2y - \lambda t = 0. \end{cases}$$

Montrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base en fonction de λ.

Exercice 12. [Corrigé] ★★★

Déterminer si les familles de fonctions suivantes sont des familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. (f_1, f_2, f_3, f_4) où $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto x\cos x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$ et $f_4 : x \mapsto x \sin x$.
2. $(g_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on considère les deux familles de fonctions suivantes :

$$\mathcal{B} = \{e_0 : x \mapsto 1,\ e_1 : x \mapsto \cos x,\ e_2 : x \mapsto \cos^2 x,\ e_3 : x \mapsto \cos^3 x\}$$
$$\mathcal{C} = \{f_0 : x \mapsto 1,\ f_1 : x \mapsto \cos x,\ f_2 : x \mapsto \cos(2x),\ f_3 : x \mapsto \cos(3x)\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux familles libres.
2. On note E et F les espaces respectivement engendrés par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Montrer que $E = F$.
3. Soit f une fonction de E. On note (a, b, c, d) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
   Quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$?

Dimension

Exercice 14. [Corrigé] ★☆☆

On considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $v_1 = (1, 2, 4)$ et $v_2 = (3, -1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer les coordonnées des vecteurs v_1 et v_2 dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 15. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer la dimension de chacun des espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1) = 0\}$
2. l'espace vectoriel E_2 des fonctions dont la dérivée seconde est nulle.
3. l'espace vectoriel E_3 des solutions de l'équation différentielle $y' + 4y = 0$.

Exercice 16. [Corrigé] ★☆☆

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour lequel :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que E est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 17. [Corrigé] ★★☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$.

Montrer que la famille $(P_0,\ \ldots,\ P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18. [Corrigé] ★★☆

Vérifier que la famille (u_1, u_2, u_3) formée par les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$ et $u_3 = (2, 0, 0, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 19. [Corrigé] ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ suivant :

$$E = \left\{x \mapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) \mid (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que E est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 20. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer, dans chacun des cas, le rang de la famille formée par les vecteurs suivants.

1. $x_1 = (1,1,0),\ x_2 = (0,1,1)$
2. $x_1 = (0,0,1),\ x_2 = (0,1,1),\ x_3 = (1,1,1)$
3. $x_1 = (0,1,-1),\ x_2 = (1,0,-1),\ x_3 = (1,-1,0),\ x_4 = (1,1,1)$.

Exercice 21. [Corrigé] ★★★

Dans $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$, on considère les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 22. [Corrigé] ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $P_k^n = X^k(X-1)^{n-k}$.

1. Montrer par récurrence que $\mathrm{rg}(P_0^n, \ldots, P_n^n) = n+1$.
2. Que peut-on alors dire de la famille $(P_0^n, \ldots, P_n^n)$?