Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer, dans chaque cas, si l'ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Justifier.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$$
$$C = \{(x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \qquad D = \{(1+x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2. [Corrigé] ★☆☆

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-2i & 0 \\ -i & 1 & 1+i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & i & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Montrer que $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AM = MB\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3. [Corrigé] ★☆☆

Montrer que l'ensemble :

$$E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_n = 0\}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 4. [Corrigé] ★★☆

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère deux vecteurs $x = (1,-1,1)$ et $y = (0,1,a)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le vecteur $u = (1,1,2)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(x,y)$.
2. Dans ce cas, comparer alors $\mathrm{Vect}(x,y)$, $\mathrm{Vect}(u,x)$ et $\mathrm{Vect}(u,y)$.

Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 5. [Corrigé] ★☆☆

Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$? Dans le cas contraire, établir une relation linéaire liant les vecteurs de la famille, puis en extraire une famille libre.

1. $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-2,-1)$ et $u_3 = (1,4,3)$.
2. $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (1,1,1)$.
3. $\mathcal{B}_3 = (t_1, t_2, t_3)$ où $t_1 = (1,2,1)$, $t_2 = (2,1,-1)$ et $t_3 = (1,-1,-2)$.

Exercice 6. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ où $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,1)$.
2. $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ où $u = (-1,1,0)$, $v = (2,0,1)$ et $w = (1,1,1)$.
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 7. [Corrigé] ★☆☆

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 8. [Corrigé] ★★☆

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, x+y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Déterminer une base de F, de G et de $F \cap G$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

On considère le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que les ensembles suivants :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ MU = \lambda U\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix},\ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.
3. Déterminer une base de $E \cap F$.

Exercice 10. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u_1, \dots, u_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E.

Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ est génératrice de E et $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit F_λ l'ensemble des solutions (x, y, z, t) du système :

$$\begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 2y - \lambda t = 0. \end{cases}$$

Montrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base en fonction de λ.

Exercice 12. [Corrigé] ★★★

Déterminer si les familles de fonctions suivantes sont des familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. (f_1, f_2, f_3, f_4) où $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto x \cos x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$ et $f_4 : x \mapsto x \sin x$.
2. $(g_k)_{0 \leq k \leq n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on considère les deux familles de fonctions suivantes :

$$\mathcal{B} = \{e_0 : x \mapsto 1,\ e_1 : x \mapsto \cos x,\ e_2 : x \mapsto \cos^2 x,\ e_3 : x \mapsto \cos^3 x\}$$
$$\mathcal{C} = \{f_0 : x \mapsto 1,\ f_1 : x \mapsto \cos x,\ f_2 : x \mapsto \cos(2x),\ f_3 : x \mapsto \cos(3x)\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux familles libres.
2. On note E et F les espaces respectivement engendrés par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Montrer que $E = F$.
3. Soit f une fonction de E. On note (a, b, c, d) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
   Quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$?

Dimension

Exercice 14. [Corrigé] ★☆☆

On considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $v_1 = (1, 2, 4)$ et $v_2 = (3, -1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer les coordonnées des vecteurs v_1 et v_2 dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 15. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer la dimension de chacun des espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1) = 0\}$
2. l'espace vectoriel E_2 des fonctions dont la dérivée seconde est nulle.
3. l'espace vectoriel E_3 des solutions de l'équation différentielle $y' + 4y = 0$.

Exercice 16. [Corrigé] ★☆☆

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour lequel :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos x.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que E est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 17. [Corrigé] ★★☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1}$.

Montrer que la famille $(P_0,\ \dots,\ P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18. [Corrigé] ★★☆

Vérifier que la famille (u_1, u_2, u_3) formée par les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$ et $u_3 = (2, 0, 0, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$, puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 19. [Corrigé] ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ suivant :

$$E = \left\{ x \mapsto P(x) \cos(x) + Q(x) \sin(x) \mid (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que E est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 20. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer, dans chacun des cas, le rang de la famille formée par les vecteurs suivants.

1. $x_1 = (1, 1, 0),\ x_2 = (0, 1, 1)$
2. $x_1 = (0, 0, 1),\ x_2 = (0, 1, 1),\ x_3 = (1, 1, 1)$
3. $x_1 = (0, 1, -1),\ x_2 = (1, 0, -1),\ x_3 = (1, -1, 0),\ x_4 = (1, 1, 1)$.

Exercice 21. [Corrigé] ★★★

Dans $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$, on considère les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 22. [Corrigé] ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $P_k^n = X^k(X-1)^{n-k}$.

1. Montrer par récurrence que $\mathrm{rg}(P_0^n, \dots, P_n^n) = n + 1$.
2. Que peut-on alors dire de la famille $(P_0^n, \dots, P_n^n)$?

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

1. L'ensemble A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:

$$u = (1, -1) \in A \text{ et } v = (1, 1) \in A \text{ mais } u + v = (2, 0) \notin A.$$

2. L'ensemble B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(0, 0\} = \text{Vect}((0, 0))$.
3. L'ensemble C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: $C = \text{Vect}((1, 1), (1, -1))$.
4. L'ensemble D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: $(0, 0) \notin D$.

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]
On commence par remarquer que $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $0_3 \in E$ puisque $A0_3 = 0_3 = 0_3B$.
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(M, N) \in E^2$.

$$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MB + NB = (\lambda M + N)B.$$

On en déduit que $\lambda M + N \in E$ et ainsi que E est stable par combinaisons linéaires.
L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Remarquons que les coefficients des matrices A et B ne jouent aucun rôle dans la structure de E : on pourrait remplacer A et B par n'importe quelles matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]
Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Par définition, E est inclus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_n = 0,$$

  donc la suite nulle appartient à E.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites de E.
  Montrons que la suite $(w_n) = (\lambda u_n + v_n)$ appartient à E :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+3} - 6w_{n+2} + 4w_n &= (\lambda u_{n+3} + v_{n+3}) - 6(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + 4(\lambda u_n + v_n)\\ &= \lambda(u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_n) + (v_{n+3} - 6v_{n+2} + 4v_n)\\ &= 0.\end{aligned}$$

  La suite $(\lambda u_n + v_n)$ appartient bien à E, qui est donc stable par combinaisons linéaires.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ donc lui-même un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. On a l'équivalence suivante :

$$u \in \text{Vect}(x, y) \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ u = \lambda x + \mu y.$$

   Or :

$$u = \lambda x + \mu y \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1\\ -\lambda + \mu = 1\\ \lambda + a\mu = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1\\ \mu = 2\\ 2a = 1\end{cases}$$

   Ainsi $u \in \text{Vect}(x, y) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

2. Dans le cas où $a = \dfrac{1}{2}$, on a $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(u, x) = \text{Vect}(u, y)$.
   En effet $u = x + 2y$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\text{Vect}(u, x) &= \text{Vect}(x + 2y, x) = \text{Vect}(2y, x) = \text{Vect}(x, y)\\ \text{Vect}(u, y) &= \text{Vect}(x + 2y, y) = \text{Vect}(x, y).\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$.

$$\begin{cases}a + b + c = 0\\ a - 2b + 4c = 0\\ a - b + 3c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -2c\\ b = c\end{cases} \Leftrightarrow$$

   La famille $\mathcal{B}_1$ est donc liée et on a la relation $-2u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

   En reprenant les calculs avec $c = 0$, on trouve que la famille (u_1, u_2) est libre et $\text{Vect}(\mathcal{B}_1) = \text{Vect}(u_1, u_2)$ puisque $u_3 = 2u_1 - u_2$.

2. On trouve via un rapide calcul (le système à résoudre est déjà triangulaire) que la famille $\mathcal{B}_2$ est libre.

3. La famille $\mathcal{B}_3$ est liée et on a la relation $t_1 - t_2 + t_3 = 0$. On trouve que la famille (t_2, t_3) est libre et $\text{Vect}(\mathcal{B}_3) = \text{Vect}(t_2, t_3)$ puisque $t_1 = t_2 - t_3$.

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. La famille (u, v) est une base de F car libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice de F.
2. La famille (u, v, w) est liée par la relation $w = u + v$. Ainsi on a $F = \text{Vect}(u, v)$. Puisque la famille (u, v) est libre, c'est une base de F.
3. On trouve que :
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\} = \{(2y - 3z, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u, v)$$
où $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-3, 0, 1)$. Puisque les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, (u, v) est une famille libre donc une base de F.

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. Après résolution du système, on trouve :
$$F = \{(-3y - t, y, 2y, t) \in \mathbb{R}^4,\ (y, t) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}(u, v)$$
où $u = (-3, 1, 2, 0)$ et $v = (-1, 0, 0, 1)$.
L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Puisque les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, (u, v) est libre donc une base de F.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

- Il vient que $F = \text{Vect}(u, v)$ =où $u = (-2, 1, 0)$ et $v = (-3, 0, 1)$. Puisque les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, la famille (u, v) est libre donc une base de F.
- Par le même raisonnement, on trouve que (w, t) forme une base de G, où $w = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$.
- On ne peut obtenir directement une base de $F \cap G$ à partir de bases de F et G.
  On peut cependant déterminer pour chacun des sous-espaces vectoriels une équation ou un système d'équations caractérisant les vecteurs de ces espaces.
  Pour F c'est immédiat et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + z\}$. Ainsi :
$$(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}z \\ y = -\dfrac{2}{3}z \end{cases}$$
  On en déduit que $F \cap G = \text{Vect}(a)$ où $a = (-5, -2, 3)$. Puisque $a \neq 0$, (a) forme une base de $F \cap G$.

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. L'ensemble E est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition. Puisque $0_3 U = 0U$, la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient bien à E.

   Soit A et B deux matrices de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe deux réels a et b tels que $AU = aU$ et $BU = bU$. On a :
$$(\lambda A + B)U = \lambda AU + BU = \lambda aU + bU = (\lambda a + b)U.$$
   On en déduit que $\lambda A + B \in E$ puis que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. On commence par déterminer une famille génératrice de F :
$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix},\ (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ &= \left\{ aV + bW + cX + dY + eZ,\ (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\} \end{aligned}$$
   où $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $F = \text{Vect}(V, W, X, Y, Z)$. Puisque les matrices V, W, X, Y et Z appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. On en déduit de plus que la famille (V, W, X, Y, Z) est une famille génératrice de F.

   Étudions la liberté de cette famille.

   Soient $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $aV + bW + cX + dY + eZ = 0_3$, i.e. :
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix} = 0_3.$$
   On en déduit immédiatement que $a = b = c = d = e = 0$. La famille (V, W, X, Y, Z) est donc libre et ainsi une base de F.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix} \in F$.

$$M \in E \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a+b+c=\gamma \\ a=d+b-c \\ b=e. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} d+b-c & b & c \\ b & d & b \\ c & b & d+b-c \end{pmatrix},\ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(A, B, I_3)$$

où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il est aisé de montrer que la famille (B, C, I_3) est libre ; c'est ainsi une base de $E \cap F$ (qui est donc de dimension 3).

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

Supposons que la famille $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est génératrice de E et $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
Soit $x \in E$. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k + \lambda_{n+1} u_{n+1}.$$

Puisque $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k.$$

On en déduit que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k + \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \lambda_{n+1}\mu_k) u_k \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n).$$

On en déduit que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E.

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

En résolvant le système, on trouve :

$$(x,y,z,t) \in F_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z-t=0 \\ x-y+z+t=0 \\ x+2y-\lambda t=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t=0 \\ 3y-z-3t=0 \\ (\lambda-2)t=0 \end{cases}$$

Distinguons deux cas de figure.

- Supposons que $\lambda \neq 2$. Alors :

$$(x,y,z,t) \in F_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ z=3y \\ t=0. \end{cases}$$

  On en déduit que $F_\lambda = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (-2, 1, 3, 0)$.
  L'ensemble F_λ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
  Puisque $u \neq 0$, la famille (u) forme une base de F_λ.

- Supposons que $\lambda = 2$. Alors :

$$(x,y,z,t) \in F_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2t \\ z=3y-3t. \end{cases}$$

  On en déduit que $F_\lambda = \mathrm{Vect}(v, w)$ où $v = (-2, 1, 3, 0)$ et $w = (2, 0, -3, 1)$.
  L'ensemble F_λ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
  Puisque les vecteurs v et w ne sont pas colinéaires, la famille (v, w) est libre ; elle forme donc une base de F_λ.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

1. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (a+bx)\cos x + (c+dx)\sin x = 0$$

   En évaluant en $x = 0$, on trouve $a = 0$, puis, en évaluant en $x = \pi$, on trouve $b = 0$.
   En évaluant en $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = -\dfrac{\pi}{2}$, on obtient un système de deux équations dont $(c,d) = (0,0)$ est l'unique solution.
   On en déduit que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la famille $(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

   La famille (g_0) est libre car la fonction g_0 est non nulle.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la famille $(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre.

   Soit $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k g_k = 0, \text{ i.e. } \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{kx} = 0.$$

   En divisant par e^{nx} on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e^{(k-n)x} = 0.$$

   Par passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on trouve $\lambda_n = 0$.

   Par liberté de la famille $(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$, on en déduit que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

   On en déduit que la famille $(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre, ce qui conclut la récurrence.

Corrigé de l'exercice 13. [Énoncé]

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a + b\cos x + c\cos^2 x + d\cos^3 x = 0.$$

   En évaluant en $x = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve $a = 0$.

   En évaluant en $x = 0$ et $x = \pi$, on trouve $b + c + d = 0$ et $-b + c - d = 0$.

   En évaluant en $x = \dfrac{\pi}{3}$, on trouve $\dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{4} + \dfrac{d}{8} = 0$. En résolvant le système :

$$\begin{cases} b + c + d = 0 \\ -b + c - d = 0 \\ \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{4} + \dfrac{d}{8} = 0 \end{cases}$$

   on trouve $b = c = d = 0$. la famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

   Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4 = 0$, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a + b\cos x + c\cos(2x) + d\cos(3x) = 0. \tag{1}$$

   En évaluant successivement en $x = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - c = 0 \\ a - b + c - d = 0 \end{cases}$$

   On pourrait évaluer en un quatrième point (bien choisi !) pour déterminer a, b, c et d. On présente ici une autre méthode. En dérivant l'égalité fonctionnelle (1), on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -b\sin x - 2c\sin(2x) - 3d\sin(3x) = 0. \tag{2}$$

   En évaluant l'égalité (2) en $x = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve : $-b + 3d = 0$.

   On en déduit que $a = b = c = d = 0$ après résolution, i.e. la famille $\mathcal{C}$ est libre.

2. Remarquons que $e_0 = f_0$, $e_1 = f_1$ et, en appliquant la formule de Moivre :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \text{ et } \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

   On en déduit que $f_2 = 2e_2 - e_0$ et $f_3 = 4e_3 - 3e_1$ et ainsi :

$$F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) \subset \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3) = E.$$

   De plus, puisque les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont libres, ce sont des bases respectives des sous-espaces vectoriels E et F, qui sont donc tous deux de dimension 4.

   Puisque $F \subset E$ et $\dim E = \dim F$, il vient que $E = F$.

3. Par définition de $\mathcal{B}$, $f = ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3 = af_0 + bf_1 + ce_2 + de_3$. Puisque :

$$e_2 = \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_2 \text{ et } e_3 = \frac{3}{4}f_1 + \frac{1}{4}f_3,$$

   on trouve que :

$$f = \left(a + \frac{1}{2}c\right) f_0 + \left(b + \frac{3}{4}d\right) f_1 + \frac{c}{2}f_2 + \frac{d}{4}f_3.$$

   Les coordonnées de f dans la base $\mathcal{C}$ de E sont donc :

$$\begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}c \\ b + \frac{3}{4}d \\ \frac{c}{2} \\ \frac{d}{4} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 14. [Énoncé]

1. Calculons le rang de $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{rg}\mathcal{B} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = 3$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre. Puisqu'elle est formée de 3 vecteurs et puisque $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Après calculs, on trouve que :

$$v_1 = xu_1 + yu_2 + zu_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

et :

$$v_2 = xu_1 + yu_2 + zu_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2. \end{cases}$$

Les coordonnées respectives de v_1 et v_2 dans $\mathcal{B}$ sont donc :

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1\\-3\\2.\end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 15. [Énoncé]

1. Puisque $E_1 = \{(X-1)Q,\ Q \in \mathbb{R}_3[X]\}$, on peut montrer que la famille

$$\Big((X-1), (X-1)X, (X-1)X^2, (X-1)X^3)\Big)$$

est une base de E_1, qui est donc de dimension 4.

2. Il vient immédiatement que :

$$E_2 = \{x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(f_1, f_2) \text{ où } f_1 : x \mapsto x \text{ et } f_2 : x \mapsto 1.$$

On peut montrer que la famille (f_1, f_2) est une base de E_2 qui est donc de dimension 2.

3. Il vient immédiatement que :

$$E_3 = \{x \mapsto Ce^{-4x},\ C \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(f_3) \text{ où } f_3 : x \mapsto e^{-4x}.$$

Puisque $f_3 \neq 0$, la famille (f_3) forme une base l'espace vectoriel E_3 qui est donc de dimension 1.

Corrigé de l'exercice 16. [Énoncé]

1. On vérifie sans difficulté que $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et :

$$E = \operatorname{Vect}(f_0, f_1, f_2)$$

où $f_0 : x \mapsto \cos x$, $f_1 : x \mapsto x\cos x$ et $f_2 : x \mapsto x^2\cos x$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. L'espace vectoriel E est engendré par une famille finie de vecteurs, il est donc de dimension finie. On peut montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre (par évaluation en 0 et π et dérivation par exemple). Elle forme donc une base de E qui est donc de dimension 3.

Corrigé de l'exercice 17. [Énoncé]

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$.

La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est donc une famille de $n+1$ polynômes de degrés étagés. C'est donc une famille libre. Puisque tous les polynômes de cette famille appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$, on a $\operatorname{Vect}(P_0, \ldots, P_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Par liberté de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$, les deux espaces vectoriels ont même dimension (égale à $n+1$). Ils sont donc égaux.

On en déduit donc que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé de l'exercice 18. [Énoncé]

Après calculs, on trouve que :

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} = 3.$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

Remarquons que :

$$u \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ u = (a + b + 2c, a, a + b, a + b + c).$$

On en déduit que $u_4 = (1, 0, 0, 1) \notin \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ (car sinon $a = b = 0$, $c = 1$ et $2c = 1$, ce qui est absurde). La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est donc libre et forme une base de $\mathbb{R}^4$.

Corrigé de l'exercice 19. [Énoncé]
On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ suivant :

$$E = \left\{ x \mapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) \mid (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \right\}.$$

1. En notant $u_k : x \mapsto x^k \cos x$ et $v_k : x \mapsto x^k \sin x$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on trouve que :

$$E = \text{Vect}(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n).$$

Puisque tous les vecteurs de cette familles sont des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Montrons que la famille $(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n)$ est libre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- On peut facilement prouver que la famille $(u_0, v_0) = (\cos, \sin)$ est libre (en évaluant une relation de liaison en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ par exemple).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $(u_0, \dots, u_{n-1}, v_0, \dots, v_{n-1})$ est libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda, \mu_0, \dots, \mu_n)$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k + \sum_{k=0}^{n} \mu_k v_k = 0$$

i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \right) + \sin x \left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k x^k \right) = 0 \qquad .(*)$$

En évaluant $(*)$ en $x = 0$, on trouve $\lambda_0 = 0$.
En divisant $(*)$ par x, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos x \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^k \right) + \frac{\sin x}{x} \left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k x^{k-1} \right) = 0 \qquad .(**)$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on trouve que $\mu_0 = 0$ en faisant tendre x vers 0 dans $(**)$.
On trouve alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos x \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{k-1} \right) + \sin x \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k x^{k-1} \right) = 0.$$

i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cos x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} x^k \right) + \sin x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k+1} x^k \right) = 0.$$

L'égalité ci-dessus étant une égalité sur $\mathbb{R}^*$ de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Elle est donc encore vraie en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} x^k \right) + \sin x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k+1} x^k \right) = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, il vient que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ et ainsi que la famille $(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n)$ est libre.

La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique que $(u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n)$ est une base de E, qui est donc un espace vectoriel de dimension $2n + 2$.

Corrigé de l'exercice 20. [Énoncé]

1. Les deux vecteurs x_1 et x_2 n'étant pas colinéaires, la famille (x_1, x_2) est libre et $\text{rg}(x_1, x_2) = 2$.
2. Calculons le rang de (x_1, x_2, x_3) via celui de leur matrice dans la base canonique :

$$\text{rg}(x_1, x_2, x_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

3. Par la même méthode, on trouve après calculs que $\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.

Corrigé de l'exercice 21. [Énoncé]
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$, i.e. :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \lambda_1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \lambda_2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \lambda_3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \lambda_4 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \lambda_1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} + \lambda_2 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} + \lambda_3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \lambda_4 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4)x + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

En évaluant en $x = 0$ et $x = 1$, on trouve que $\lambda_4 = \lambda_2 - \lambda_1$ et $\lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$. On déduit donc que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est liée par les relations :

$$f_1 - f_3 - f_4 = 0\ (\lambda_2 = 0) \text{ et } f_2 - f_3 + f_4 = 0\ (\lambda_1 = 0).$$

On a alors $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{rg}(f_3 + f_4, f_3 - f_4, f_3, f_4) = \text{rg}(f_3, f_4)$.
En reprenant les calculs avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, on trouve que la famille (f_3, f_4) est libre et ainsi :

$$rg(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{rg}(f_3, f_4) = 2.$$

Corrigé de l'exercice 22. [Énoncé]

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathrm{rg}(P_0^n, \dots, P_n^n) = n+1$.

   $\mathrm{rg}(P_0^0) = 1$ car $P_0^0 = (X-1)^0 = 1 \neq 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{rg}(P_0^n, \dots, P_n^n) = n+1$.

   Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k^{n+1} = 0 \text{ i.e. } \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k X^k (X-1)^{n+1-k} = 0$$

   En évaluant en $X = 1$, on trouve $\lambda_{n+1} = 0$. On en déduit que :

$$(X-1) \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} = 0,$$

   et ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k^n = 0.$$

   Par liberté de la famille $(P_0^n, \dots, P_n^n)$ (par hypothèse de récurrence), on en déduit que la famille $(P_0^{n+1}, \dots, P_{n+1}^{n+1})$ est libre.

2. Remarquons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = n$.

   La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.