1 Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on considère un espace vectoriel E connu contenant F et on vérifie les deux autres hypothèses de la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

- le vecteur nul de E appartient à F,
- F est stable par combinaisons linéaires.

Exercice 1. *Montrons que l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
Pour cela, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- L'ensemble F est trivialement inclus dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
- Notons Q le polynôme nul. $Q(0) = 0$ donc $Q \in F$.
- Soient P et Q deux polynômes de F et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque :
$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0,$$
on en déduit que $\lambda P + Q \in F$, i.e. F est stable par combinaisons linéaires.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2 Étudier la liberté d'une famille

Pour étudier la liberté d'une famille de vecteurs, on considère une combinaison linéaire quelconque de ces vecteurs, qu'on suppose nulle, et on vérifie si tous les coefficients de cette combinaison sont nuls.
Pour se faire, on utilise les propriétés des vecteurs manipulés afin d'obtenir un système d'équations linéaires - le nombre d'équations doit égaler le nombre de coefficients de la combinaison linéaire - à résoudre :

- pour une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on utilisera leurs coordonnées (généralement dans la base canonique) ;
- pour une famille de fonctions ou de polynômes, on pourra évaluer l'**égalité fonctionnelle** en différents points, la passer à la limite ou même la dériver.

Exercice 2. *Étudions la liberté de la famille $\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{3x}, x \mapsto e^{-x}\right)$.*
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x} + \lambda_3 e^{-x} = 0$.
En dérivant une première fois puis une seconde cette égalité fonctionnelle, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 e^x + 3\lambda_2 e^{3x} - \lambda_3 e^{-x} = 0.$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 e^x + 9\lambda_2 e^{3x} + \lambda_3 e^{-x} = 0.$$
En évaluant en $x = 0$ ces trois égalités fonctionnelles, on résout alors :
$$(S)\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 9\lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{cases}$$
On en déduit que la famille est libre.

La connaissance de la dimension d'un sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille permet parfois de ne réaliser aucun calcul.
Exercice 3. *Étudions la liberté de la famille $\Big(\left(\pi, e^3, 0\right), \left(\cos(5), \ln 1, 0\right), \left(\cos\left(\sqrt{2}\right), \sin(e), 0\right) \Big)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*
Les trois vecteurs de cette famille appartiennent au plan F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$.
Cette famille est composée de trois vecteurs d'un espace vectoriel (F) de dimension 2, elle est donc liée.

3 Montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice d'un espace vectoriel E, on suit les étapes suivantes :

(i) On considère un vecteur quelconque x de E.

(ii) On résout l'équation $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = x$ d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si cette équation admet une solution (pour tout $x \in E$), la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E. Sinon, elle ne l'est pas.

Exercice 4. *Montrons que la famille* $\mathcal{F} = \big((1,0,-1),(2,1,0),(-1,1,2),(1,1,1)\big)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) = a(1,0,-1)+b(2,1,0)+c(-1,1,2)+d(1,1,1) &\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c+d = x & (L_1) \\ b+c+d = y & (L_2) \\ -a+2c+d = z & (L_3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c+d = x \\ b+c+d = y \\ 2b+c+2d = x+z & (L_3) \leftarrow (L_1)+(L_3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-c+d = x \\ c+b+d = y \\ b+d = x+z-y & (L_3) \leftarrow (L_3)-(L_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2x+4y-3z-3d \\ c = -x+2y-z \\ b = x-y+z-d \end{cases}
\end{aligned}$$

L'équation (d'inconnues a, b, c et d) admet (au moins) une solution pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

4 Déterminer une base d'un espace vectoriel

Pour déterminer une base d'un espace vectoriel E, on suit les étapes suivantes.

(i) On commence par chercher une famille génératrice de E.

Si E est défini *par compréhension*, on trouve généralement une telle famille en écrivant E comme un "Vect".

(ii) Il suffit ensuite de vérifier que cette famille génératrice est bien libre. Dans le cas contraire, on extrait de cette famille une famille libre.

La connaissance de la dimension de l'espace peut aider à déterminer une famille candidate (par son cardinal).

Exercice 5. *Montrons que l'ensemble ci-dessous est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et exhibons-en une base.*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

Soit $A \in E$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $E = \mathrm{Vect}(I_2, J, K)$. On en déduit ainsi que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et (I_2, J, K) est une famille génératrice de E.
Étudions la liberté de la famille (I_2, J, K). Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que (S) : $aI_3 + bJ + cK = 0$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-c \end{cases}.$$

La famille (I_2, J, K) n'est donc pas libre (*on aurait pu remarquer initialement que* $J = I_2 + K$). On en déduit que $E = \mathrm{Vect}(I_2, K)$. Puisque la famille (I_2, K) est trivialement libre (K n'est pas une matrice diagonale), (I_2, K) est une base de E.

5 Calculer la dimension d'un espace vectoriel

Pour calculer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit d'en trouver une base puis son cardinal.

Exercice 6. *Déterminons la dimension de l'espace vectoriel E des suites réelles vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout entier naturel n.*

La relation de récurrence est linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée, $r^2 = 4r - 4$, admet pour unique solution $r = 2$. Ainsi, on a :

$$E = \left\{ (2^n(\lambda n + \mu))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

En notant $f : n \mapsto n2^n$ et $g : n \mapsto 2^n$, on trouve que :

$$E = \left\{ n \mapsto \lambda n 2^n + \mu 2^n \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(f, g).$$

On retrouve bien que E est un espace vectoriel (vu par exemple comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), engendré par la famille (f, g).
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f + \mu g = 0$. En évaluant en $n = 0$, on trouve $0 = \lambda f(0) + \mu g(0) = \mu$. En évaluant en $n = 1$, on trouve $\lambda = 0$. La famille (f, g) est bien libre, c'est donc une base de E.
L'espace vectoriel E est donc de dimension 2.

6 Calculer le rang d'une famille de vecteurs

Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, on suit l'une des méthodes ci-dessous.

- **Étude de la liberté de la famille** : si la famille est liée, on supprime de la famille un vecteur s'écrivant comme combinaison linéaire des autres. On réitère cette opération jusqu'à obtenir une famille libre. Le rang de la famille est alors égal au nombre de vecteurs restants.

- **Calcul de rang matriciel** : on détermine les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans une base $\mathcal{B}$ de l'espace, fournissant ainsi la matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}$. Le rang de la famille s'obtient en calculant, par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, le rang de la matrice associée.

Exercice 7. *Calculons le rang de la famille* (u, v, w, t) *de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*, où* $u = (0, 1, 1)$*,* $v = (1, 1, 1)$*,* $w = (-1, 1, 2)$ *et* $t = (1, 2, 0)$*.*

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $au + bv + cw + dt = (0, 0, 0)$ $(\star)$.

$$
\begin{aligned}
(\star) &\Leftrightarrow \begin{cases} b - c + d = 0 \\ a + b + c + 2d = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b - c + d = 0 & \\ -c + 2d = 0 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_3) \\ a + b + 2c = 0 & \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 0 & (L_1) \leftarrow (L_3) \\ b - c + d = 0 & (L_2) \leftarrow (L_1) \\ c = -2d & (L_3) \leftarrow (L_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5d \\ b = d \\ c = 2d \end{cases}
\end{aligned}
$$

La famille (u, v, w, t) est liée par la relation $-5u + v + 2w + t = (0, 0, 0)$, ou encore $t = 5u - v - 2w$. Ainsi $\mathrm{rg}(u, v, w, t) = \mathrm{rg}(u, v, w)$.

En reprenant les calculs précédents (avec $d = 0$), on trouve que la famille (u, v, w) est libre. On obtient alors le rang de la famille : $\mathrm{rg}(u, v, w, t) = \mathrm{rg}(u, v, w) = 3$.

Exercice 8. *Calculons le rang de la famille* (u, v, w, t) *de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*, où* $u = (0, 1, 1)$*,* $v = (1, 1, 1)$*,* $w = (-1, 1, 2)$ *et* $t = (1, 2, 0)$*.*

La matrice de la famille (u, v, w, t) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}(u, v, w, t) &= \mathrm{rg}\, M \\
&= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_3) \\ \\ \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \leftarrow (L_3) \\ (L_2) \leftarrow (L_1) \\ (L_3) \leftarrow (L_2) \end{matrix} \\
&= 3
\end{aligned}
$$