Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1 Variables aléatoires réelles

1.1 Définition

Définition 1

On appelle **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel a, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$ soit un événement, i.e. :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{T}.$$

Les événements $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$ sont généralement notés $[X \leqslant a]$.
L'ensemble $X(\Omega)$ est généralement appelé **univers-image** ou **ensemble des valeurs prises par X**.

Exemple 2

On lance deux dés et on note X la somme des deux résultats obtenus. On peut définir l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
X est une variable aléatoire réelle et $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

Exemple 3

On tire à pile ou face avec une pièce jusqu'à obtenir pile. On note X le nombre de tirages effectués . On peut alors définir l'univers :

$$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, \ldots\} \cup \{FFFFFF\ldots\}.$$

On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
Comme vu dans le chapitre "Probabilités discrètes", l'événement $\{FFFFFF\ldots\}$ ("on ne tire que des faces") est de probabilité nulle, X est une variable aléatoire finie presque-sûrement (i.e. $\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$).
Par abus de langage, on pourra écrire que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Remarquons qu'on a admis que X est une variable aléatoire réelle [1].

Proposition 4 (*admise*)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ est un événement, i.e. :

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathcal{T}.$$

Les événements $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ sont généralement notés $[X \in I]$.

1.2 Fonction de répartition

Définition 5

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ la fonction, généralement notée F_X :

$$F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0, 1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x). \end{array}$$

Théorème 6 (*Caractérisation d'une loi par sa fonction de répartition (admise)*)

Deux variables aléatoires réelles suivent la même loi si, et seulement si, elles ont la même fonction de répartition.

Proposition 7

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si :

$$\begin{cases} F \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{-\infty} F = 0 \text{ et } \lim\limits_{+\infty} F = 1 \end{cases}$$

Démonstration.

1.3 Inégalités de concentration

Théorème 8 (*Inégalité de Markov*)

Soit X une variable aléatoire réelle **positive** admettant une espérance. Alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration.

Théorème 9 (*Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev*)

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

Remarque 10

Ce résultat rappelle que la variance permet de quantifier la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne : la probabilité que X prenne des valeurs éloignées de $\mathbb{E}(X)$ d'au moins ε est d'autant plus faible que $\mathbb{V}(X)$ l'est.

Exemple 11

Une vache laitière Prim'Holstein produit en moyenne 30 litres de lait par jour.

1. Majorer la probabilité qu'elle produise plus de 36 litres de lait un jour donné.
2. Reprendre la question précédente en supposant que l'écart-type de production de lait est d'un litre.

1.4 Indépendance de variables aléatoires

Définition 12

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants, i.e. :

$$\mathbb{P}\left([X \in I] \cap [Y \in J]\right) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J).$$

Définition 13

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si, pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in I_k).$$

Proposition 14 (*admise*)

Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes alors elles sont deux-à-deux indépendantes.

Définition 15

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de variables aléatoires indépendantes** si pour tout sous-ensemble fini I de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires de la sous-famille finie $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 16 (*Lemme des coalitions (admis)*)

Soient $X_1, \ldots, X_{n+p}$ des variables mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

(i) Soient $\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur $X_1(\Omega),\ X_2(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$. Les variables aléatoires $\varphi_1(X_1),\ \varphi_2(X_2), \ldots,\ \varphi_n(X_n)$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(ii) Pour toutes fonctions réelles $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ respectivement définies sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et $X_{n+1}(\Omega) \times \cdots \times X_{n+p}(\Omega)$, les variables aléatoires $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ et $\psi(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.

Exemple 17

Si $X,\ Y,\ Z$ et T sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors XY et $Z+T$ sont indépendantes, et $X, Y-Z$ et T^2 sont mutuellement indépendantes.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 18

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est **discrète** si son univers-image $X(\Omega)$ est discret, i.e. fini ou dénombrable.

Proposition 19 (*admise*)

Si X une variable aléatoire réelle discrète, alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements.

Remarque 20

Donner la **loi** d'une variable aléatoire réelle **discrète** X, c'est donner l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_X : & X(\Omega) & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(X = x). \end{array}$$

Proposition 21 (*admise*)

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète est constante par morceaux.
Les points de discontinuité correspondent aux valeurs prises par la variable aléatoire.

La propriété ci-dessous montre qu'on peut déduire la loi de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs entières, et réciproquement.

Proposition 22 (*Loi et fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à valeurs entières*)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(i) La fonction de répartition F_X de X se déduit de sa loi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_X(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k).$$

(ii) La loi de X se déduit de sa fonction de répartition.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1).$$

Démonstration.

Exemple 23

Un sauteur à la perche tente de franchir des barres de plus en plus hautes, de hauteurs numérotées par tous les entiers naturels non nuls. Il n'essaie de franchir la barre de hauteur numérotée $n \in \mathbb{N}^*$ que s'il y a déjà réussi à franchir les $n-1$ premières barres. La probabilité que le sauteur franchisse la barre n sachant qu'il a franchi les $n-1$ précédentes est égale à $\frac{1}{n}$. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la dernière barre franchie.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité qu'il franchisse les n premières barres.

2. En déduire la loi de X.

2.2 Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète

2.2.1 Définition

Définition 24

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs entières.
On dit que X admet une **espérance** si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente.
Dans ce cas, son **espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, est égale à la somme de cette série.

Remarque 25

Toute variable aléatoire finie admet une espérance. En particulier, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

En particulier, toute variable aléatoire X constante (égale à C) admet une espérance (égale à C).

Exemple 26

La variable aléatoire X définie ci-dessous n'admet pas d'espérance.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Exemple 27

La variable aléatoire X définie ci-dessous admet espérance une espérance égale à $\mathbb{E}(X) = 3$.

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{2^{n+1}}.$$

2.2.2 Propriétés

Théorème 28 (*Linéarité de l'espérance (admise)*)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance. Alors :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X).$$

(ii) la variable aléatoire $X + Y$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

Corollaire 29

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Alors :

(i) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,

(ii) la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Théorème 30 (*Positivité de l'espérance*)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant une espérance.
Si X est presque sûrement positive (on note $X \geqslant 0$ p.s.) alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$. Si de plus $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $X = 0$ p.s.

Démonstration.

Corollaire 31 (*Croissance de l'espérance*)

Soient X et Y des variables aléatoires réelles admettant une espérance.
Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Théorème 32 (*Théorème du transfert (admis)*)

Soit X une variable aléatoire discrète et soit f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.
La variable $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$ est absolument convergente.
Dans ce cas, l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}\left(f(X)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Exemple 33 (Exemple fondamental)

Si la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X=x)$ converge, alors X^2 admet une espérance et $\mathbb{E}(X^2) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X=x)$.

Exemple 34

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par : $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
Montrer que $Y=\exp(X)$ admet une espérance qu'on calculera.

2.3 Variance d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 35

On dit qu'une variable aléatoire réelle X admet une **variance** si la variable $\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2$ admet une espérance.
Dans ce cas, on appelle **variance** et **écart-type** de X les réels $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2\right)$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Définition 36

On dit qu'une variable aléatoire réelle X admet un **moment** d'ordre r si la variable X^r admet une espérance.
Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r le réel $\mu_r(X) = \mathbb{E}\left(X^r\right)$.

Lemme 37

Si une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Démonstration.

Théorème 38 (*Formule de König-Huygens*)

Une variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, elle admet une variance.
Dans ce cas, on a la formule suivante :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration.

Proposition 39

Si une variable aléatoire réelle X admet une variance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

Proposition-Définition 40

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance non nulle. On note $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.
La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X**, est centrée et réduite, i.e. d'espérance nulle et de variance égale à 1.

Démonstration.

3 Lois discrètes usuelles

3.1 Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$

Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![a, b]\!]\right)$
Univers-image	$X(\Omega) = [\![a, b]\!]$
Loi de probabilité	$\forall k \in [\![a, b]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{b-a+1}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$

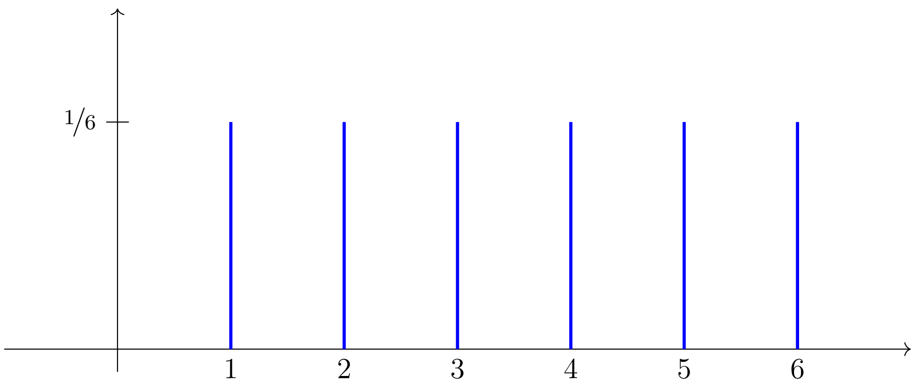

Figure 1: Graphe de la distribution de la loi uniforme $\mathcal{U}\left([\![1, 6]\!]\right)$

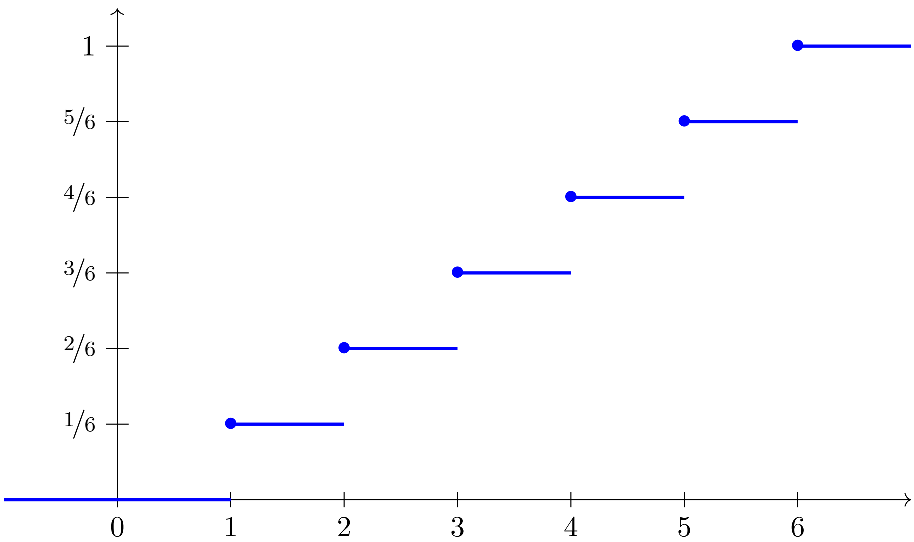

Figure 2: Graphe de la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}\left([\![1, 6]\!]\right)$

Méthode 41. Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$

La fonction `randint` du module `random` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$

```
import random as rd
x = rd.randint(a, b)
```

3.2 Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
Univers-image	$X(\Omega) = \{0;1\}$
Loi de probabilité	$\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = p$
Variance	$\mathbb{V}(X) = p(1-p) = pq$

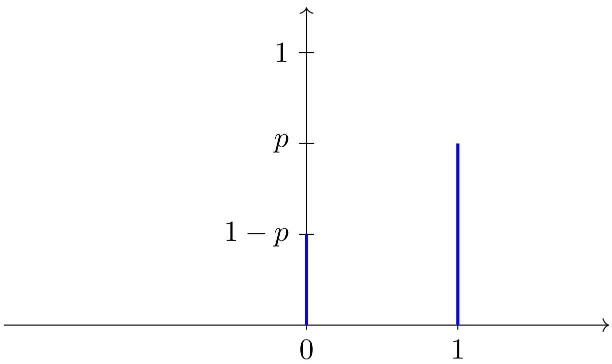

Figure 3: Graphe de la distribution de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

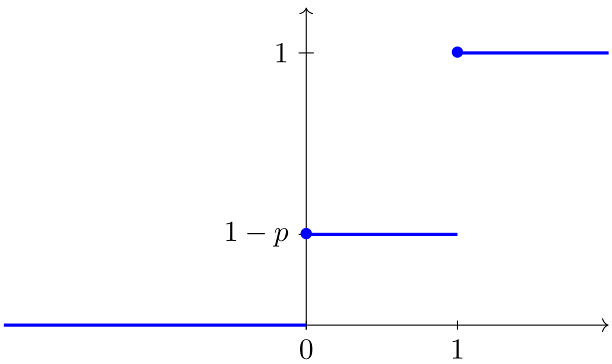

Figure 4: Graphe de la fonction de répartition de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Méthode 42. Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Si X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$, l'événement $[X \leqslant p]$ (où $p \in]0,1[$) est de probabilité p.
On peut alors écrire une fonction simulant la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p à l'aide de la fonction `random` du module `random` :

```
def bernoulli(p):
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

3.3 Loi binomiale

Loi de binomiale de paramètres n et p	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
Univers-image	$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
Loi de probabilité	$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = np$
Variance	$\mathbb{V}(X) = np(1-p) = npq$

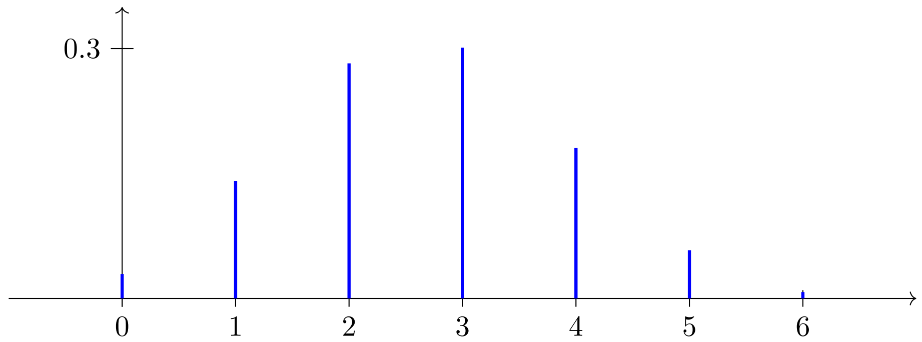

Figure 5: Graphe de la distribution de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \frac{4}{9}\right)$

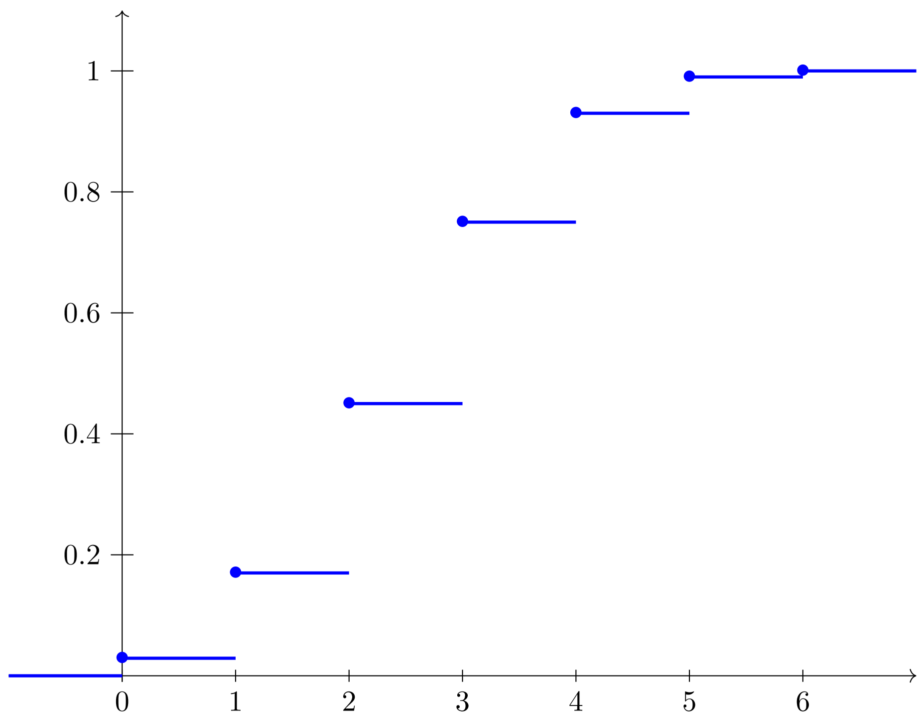

Figure 6: Graphe de la fonction de répartition de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \frac{4}{9}\right)$

Théorème 43 (*admis*)

Soient $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Alors la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple 44 (Exemple fondamental)

On considère une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir face (succès) est égale à $p \in]0,1[$.
On lance n fois cette pièce (on suppose les lancers indépendants) et on note X la variable aléatoire égale au nombre de faces (succès) obtenues.
La variable X est le nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre p ; elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et p.

Méthode 45. Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

À l'aide du résultat ci-dessus et de la simulation d'une loi de Bernoulli présentée au paragraphe précédent, on peut écrire :

```python
import random as rd

def binomiale(n, p):
    somme = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < p:
            somme += 1
    return somme
```

Remarque 46 Attention !

Le code ci-dessous ne permet pas de simuler une variable aléatoire simulant la loi binomiale de paramètres n et p.

```python
def binomiale(n, p):
    somme = 0
    x = rd.random()
    for k in range(n):
        if x < p:
            somme += 1
    return somme
```

En effet, on ne tire qu'un seul entier aléatoire (0 ou 1). La variable aléatoire simulée ici ne peut alors prendre que deux valeurs : n avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$.

3.4 Loi géométrique

Définition 47

Soit p un réel de l'intervalle $]0,1[$. On note $q = 1-p$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = q^{k-1}p \qquad (\text{où } q = 1-p). \end{cases}$$

Remarque 48

On remarque que la série géométrique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} q^{k-1}$ (de raison $q \in]0,1[$) converge et a pour somme $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$.
Ainsi la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X=k)$ converge et a pour somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1.$$

Théorème 49 (*Loi du premier succès*)

On note X la variable aléatoire égale au **rang du premier succès** lors de la répétition (éventuellement infinie) d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$.
La variable X, appelée **temps d'attente** du premier succès. suit la loi géométrique de paramètre p.
De plus, l'événement $[X = +\infty]$ correspondant à une infinité d'échecs sans aucun succès est de probabilité nulle.

Démonstration.

Méthode 50. Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique

Le théorème 49 permet d'écrire une fonction simulant la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

```python
import random as rd

def geometrique(p):
    rang = 1
    while rd.random() > p:
        rang += 1
    return rang
```

Théorème 51

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Démonstration.

Loi de géométrique de paramètre p	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
Univers-image	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
Loi de probabilité	$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
Variance	$\mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$

3.5 Loi de Poisson

Définition 52

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{cases}$$

Remarque 53

On remarque que la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge (série exponentielle) pour tout $\lambda > 0$ et a pour somme e^{λ}.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)$ converge et a pour somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Théorème 54

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration.

Loi de Poisson de paramètre λ	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
Univers-image	$X(\Omega) = \mathbb{N}$
Loi de probabilité	$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \lambda$
Variance	$\mathbb{V}(X) = \lambda$

Méthode 55. Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson

La fonction `random.poisson` du module `numpy` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi de Poisson dont le paramètre est donné en argument :

```
import numpy as np

def simule_Poisson(lam):
    return np.random.poisson(lam)
```

Le nom `lambda` est réservé en Python, on ne l'utilisera pas pour nommer une variable.

Exemple 56 (Exemples)

Une loi de Poisson permet de décrire le nombre d'évènements d'un certain type se produisant dans une période de temps. On dit que les lois de Poisson sont les "*lois des évènements rares*".
On modélise souvent :

- le nombre de clients se présentant dans un magasin pendant une période T,
- le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une période T,

par la loi de Poisson de paramètre λ, où λ désigne le nombre moyen d'événements pendant la période T.