CHAPITRE 5

Variables aléatoires discrètes

On continue la généralisation des probabilités discrètes : après être passé des espaces probabilisés finis aux espaces probabilisés discrets, on passe des variables aléatoires finies aux variables aléatoires discrètes. On va donc reprendre toutes les notions déjà vues (loi, fonction de répartition, espérance et variance, etc) mais faire attention à l'existence d'objets définis en sup par des sommes : on ne pourra les définir de manière générale qu'à la condition que certaines séries convergent...

SOMMAIRE

1 Variables aléatoires réelles . . . 2
1.1 Définition . . . 2
1.2 Fonction de répartition . . . 3
1.3 Inégalités de concentration . . . 3
1.4 Indépendance de variables aléatoires . . . 5
2 Variables aléatoires discrètes . . . 6
2.1 Loi d'une variable aléatoire discrète . . . 6
2.2 Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète . . . 8
2.2.1 Définition . . . 8
2.2.2 Propriétés . . . 10
2.3 Variance d'une variable aléatoire réelle . . . 12
3 Lois discrètes usuelles . . . 14
3.1 Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ . . . 14
3.2 Lois de Bernoulli . . . 15
3.3 Lois binomiales . . . 16
3.4 Loi géométrique . . . 18
3.5 Loi de Poisson . . . 21

OBJECTIFS

- Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète.
- Étudier l'existence et calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète.
- Utiliser les inégalités de concentration (Markov, Bienaymé-Tchebychev).
- Reconnaitre et exploiter l'indépendance de variables aléatoires.
- Reconnaître et utiliser les lois usuelles (uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson).
- Simuler numériquement une variable aléatoire discrète.

1 Variables aléatoires réelles

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Nous commençons par formaliser l'idée d'associer un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire.

1.1 Définition

Définition 1.1

On appelle **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel a, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$ soit un événement, i.e. :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{T}.$$

Les événements $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$ sont généralement notés $[X \leqslant a]$. L'ensemble $X(\Omega)$ est généralement appelé **univers-image** ; c'est l'ensemble des valeurs prises par X.

Cette condition « technique » garantit que tout ensemble de la forme $[X \in I]$ où I est un intervalle est bien un événement.

Exemple 1.2

On lance deux dés et on note X la somme des deux résultats obtenus. On peut définir l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. L'application X est une variable aléatoire réelle et $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

Exemple 1.3

On tire à pile ou face avec une pièce jusqu'à obtenir pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués (montrer qu'une application est une variable aléatoire n'est pas un attendu du programme). On peut alors définir l'univers :

$$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, \ldots\} \cup \{FFFFFF\ldots\}.$$

On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
Comme vu dans le chapitre « Probabilités discrètes », l'événement $\{FFFFFF\ldots\}$ (« on ne tire que des faces ») est de probabilité nulle, X est une variable aléatoire finie presque-sûrement (i.e. $\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$). Par abus de langage, on pourra écrire que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Propriété 1.4

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ est un événement, i.e. :

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathcal{T}.$$

Les événements $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ sont généralement notés $[X \in I]$.

1.2 Fonction de répartition

Une fois qu'on sait parler d'événements comme $[X \leqslant a]$, une idée naturelle est de suivre comment leur probabilité évolue lorsque a varie : c'est ce que fait la fonction de répartition.

Définition 1.5

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ la fonction, généralement notée F_X :

$$\begin{array}{rccc} F_X : & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x). \end{array}$$

Théorème 1.6 – Caractérisation d'une loi par sa fonction de répartition

Deux variables aléatoires réelles suivent la même loi si, et seulement si, elles ont la même fonction de répartition.

Démonstration admise.

Propriété 1.7

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si :

$$\begin{cases} F \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{-\infty} F = 0 \text{ et } \lim\limits_{+\infty} F = 1 \end{cases}$$

Démonstration admise (la construction d'une variable admettant une fonction de répartition donnée dépasse largement le cadre du programme).

1.3 Inégalités de concentration

Théorème 1.8 – Inégalité de Markov ♥

Soit X une variable aléatoire réelle **positive** admettant une espérance. Alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration. *Soit $a > 0$. Soit $\omega \in \Omega$. Raisonnons par distinction de cas :*

- *Si $X(\omega) \geqslant a$, alors $a\mathbb{1}_{[X \geqslant a]}(\omega) = a \leqslant X(\omega)$.*
- *Si $X(\omega) < a$, alors $a\mathbb{1}_{[X \geqslant a]}(\omega) = 0 \leqslant X(\omega)$ car X est une variable aléatoire positive.*

Ainsi, dans tous les cas, on a l'inégalité $a\mathbb{1}_{[X \geqslant a]} \leqslant X$. La variable aléatoire $a\mathbb{1}_{[X \geqslant a]}$ est finie (elle ne prend que deux valeurs 0 et a) ; elle admet donc une espérance égale à :

$$\mathbb{E}\left(a\mathbb{1}_{[X \geqslant a]}\right) = a\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[X \geqslant a]}\right) = a\mathbb{P}(X \geqslant a).$$

Toutes les hypothèses sont vérifier pour appliquer alors la croissance et la linéarité de l'espérance :

$$a\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(X).$$

On conclut en divisant par $a > 0$. □

Théorème 1.9 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev ♥

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. *Soit $\varepsilon > 0$. La variable aléatoire $Y = \big[X - \mathbb{E}(X)\big]^2$ est positive et admet une espérance égale à $\mathbb{V}(X)$ par hypothèse. Or $\big[|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big] = [Y \geqslant \varepsilon^2]$. En appliquant l'inégalité de Markov à Y, qui est bien positive et qui admet une espérance, on trouve que :*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(Y \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

□

Remarque 1.10

Ce résultat rappelle que la variance permet de quantifier la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne : la probabilité que X prenne des valeurs éloignées de $\mathbb{E}(X)$ d'au moins ε est d'autant plus faible que $\mathbb{V}(X)$ l'est.

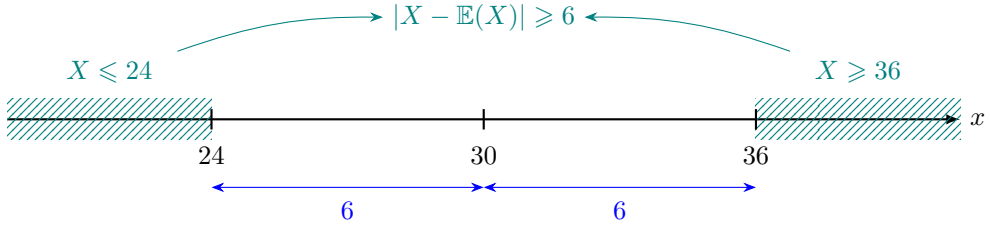
Exemple 1.11 – ♥

Une vache laitière Prim'Holstein produit en moyenne 30 litres de lait par jour.

1. Majorer la probabilité qu'elle produise plus de 36 litres de lait un jour donné.
2. Reprendre la question précédente en supposant que l'écart-type de production de lait est d'un litre.

Démonstration. *Notons X la variable aléatoire égale au volume (en litres) de lait journalier produit par la vache. D'après l'énoncé $\mathbb{E}(X) = 30$.*

1. *On cherche à majorer $\mathbb{P}(X \geqslant 36)$. Puisque X admet une espérance et est positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov :*
$$\mathbb{P}(X \geqslant 36) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$
2. *Puisqu'on sait désormais que $\sigma(X) = 1$, on sait que X admet une variance. Pour appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on cherche à introduire un ensemble de valeurs de X centré autour de son espérance.*



$$[X \geqslant 36] \subset [X \geqslant 36] \cup [X \leqslant 24] = [X \geqslant 30 + 6] \cup [X \leqslant 30 - 6] = [|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 6]$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 36) \leqslant \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 6) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

□

1.4 Indépendance de variables aléatoires

Tout comme deux événements peuvent être indépendants, deux variables aléatoires peuvent l'être : intuitivement, connaître la valeur de l'une ne renseigne en rien sur la valeur de l'autre.

Définition 1.12

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants, i.e. :

$$\mathbb{P}\left([X \in I] \cap [Y \in J]\right) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J).$$

Cette définition s'étend naturellement à un nombre quelconque de variables aléatoires.

Définition 1.13

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si, pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in I_k).$$

Propriété 1.14

Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes alors elles sont deux-à-deux indépendantes.

Démonstration admise.

Définition 1.15

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de variables aléatoires indépendantes** si pour tout sous-ensemble fini I de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires de la sous-famille finie $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

En pratique, on construit souvent de nouvelles variables aléatoires indépendantes à partir d'anciennes, en leur appliquant des fonctions ou en les regroupant en paquets disjoints, des *coalitions*.

Théorème 1.16 – Lemme des coalitions

Soient $X_1, \ldots, X_{n+p}$ des variables mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. Soient φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions à valeurs réelles respectivement définies sur les univers-image $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$. Les variables aléatoires $\varphi_1(X_1)$, $\varphi_2(X_2), \ldots,$ $\varphi_n(X_n)$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
2. Pour toutes fonctions réelles $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ respectivement définies sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et $X_{n+1}(\Omega) \times \cdots \times X_{n+p}(\Omega)$, les variables aléatoires $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ et $\psi(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.

Démonstration admise.

Exemple 1.17

Si X, Y, Z et T sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors XY et $Z+T$ sont indépendantes, et $X, Y-Z$ et T^2 sont mutuellement indépendantes.

Propriété 1.18

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration admise.

Propriété 1.19

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une variance, alors $X+Y$ admet une variance et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration admise.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.1

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est **discrète** si son univers-image $X(\Omega)$ est discret, i.e. fini ou dénombrable.

Propriété 2.2

Si X une variable aléatoire réelle discrète, alors $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements (fini ou dénombrable).

Démonstration. *Soient x et y deux éléments distincts de $X(\Omega)$. On a évidemment $[X=x]\cap[X=y]=\emptyset$. De plus, on a :*

$$\bigcup_{x\in X(\Omega)} [X=x] = \bigcup_{x\in X(\Omega)} \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x\} = \Omega.$$

□

Puisque les événements $[X=x]$ forment un système complet, il suffit de connaître leur probabilité pour décrire entièrement le comportement aléatoire de X : c'est ce que l'on appelle la loi de X.

Remarque 2.3

Donner la **loi** d'une variable aléatoire réelle **discrète** X, c'est donner l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & X(\Omega) & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(X=x). \end{array}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est *en escalier*, ce qui sera illustré avec les lois usuelles.

Propriété 2.4

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète est constante par morceaux.
Les points de discontinuité correspondent aux valeurs prises par la variable aléatoire.

Démonstration admise.

La propriété ci-dessous montre qu'on peut déduire la loi de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs entières, et réciproquement : loi et fonction de répartition portent donc exactement la même information.

Propriété 2.5 – Loi et fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à valeurs entières

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, i.e. telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. La fonction de répartition F_X de X se déduit de sa loi :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_X(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k).$$
2. La loi de X se déduit de sa fonction de répartition.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1).$$

Reste maintenant la question pratique : comment détermine-t-on, sur un exemple, la loi d'une variable aléatoire donnée ? La méthode ci-dessous rassemble les trois stratégies les plus courantes.

Méthode 2.6 – Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X, on suit les étapes suivantes.

1. On commence par déterminer son univers-image $X(\Omega)$.
2. On cherche ensuite à calculer, pour tout $k \in X(\Omega)$, la probabilité de l'événement $[X = k]$.
   - On tente d'écrire l'événement $[X = k]$ comme union, intersection et/ou complémentaire d'événements plus simples.
   - Si la variable X s'écrit comme fonction d'une variable aléatoire Y dont on connait la loi, on cherche à écrire l'événement $[X = k]$ en fonction de Y et k.
   - Si X est à valeurs entières, on peut chercher à calculer la probabilité des événements $[X \leqslant k]$ et $[X \leqslant k-1]$ (ou bien $[X \geqslant k]$ et $[X \geqslant k+1]$) et obtenir $\mathbb{P}(X = k)$ *par différence* en remarquant que :
$$[X = k] = [X \leqslant k] \setminus [X \leqslant k-1] = [X \geqslant k] \setminus [X \geqslant k+1].$$

Exemple 2.7 – ♥

Un sauteur à la perche tente de franchir des barres de plus en plus hautes, de hauteurs numérotées par tous les entiers naturels non nuls. Il n'essaie de franchir la barre de hauteur numérotée $n \in \mathbb{N}^*$ que s'il y a déjà réussi à franchir les $n-1$ premières barres. La probabilité que le sauteur franchisse la barre n sachant qu'il a franchi les $n-1$ précédentes est égale à $\dfrac{1}{n}$. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la dernière barre franchie.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité qu'il franchisse les n premières barres.
2. En déduire la loi de X.

Démonstration. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons B_k l'événement « le sauteur franchit la barre numérotée k ».*

1. *On cherche* $\mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n)$. *D'après la formule des probabilités totales, on trouve :*
$$\mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$
2. *On commence par l'univers-image :* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. *Remarquons que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $B_1 \cap \cdots \cap B_n = [X \geqslant n]$ *et que* $[X = n] = [X \geqslant n] \setminus [X \geqslant n+1]$. *On trouve ainsi la loi de* X *:*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}.$$

□

Exercice à la maison 2.8

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n) > 0$. On suppose qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{[X\geqslant n]}(X = n) = \lambda$. Quelle est la loi de X ?

2.2 Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète

2.2.1 Définition

À l'aide du calcul intégral, on peut montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et a pour somme $S = \ln 2$. On sait aussi que cette série n'est pas absolument convergente. Si on pouvait *réordonner* les termes de la somme de la série, on pourrait écrire :

$$\begin{aligned}
S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots\right] \\
&= \frac{S}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduirait que $S = 0$, ce qui est absurde... On vient d'illustrer un phénomène étrange, le **théorème de réarrangement de Riemann** : en réordonnant les termes de sommation d'une série convergente non absolument convergente, on n'obtient pas la même somme. Pire : en choisissant astucieusement l'ordre de sommation, on peut faire converger la série vers *n'importe quel réel* ou même la faire diverger !

Heureusement, lorsqu'une série est absolument convergente, aucune modification de l'ordre des termes de sommation ne modifie la nature ou la somme de la série. C'est pour cette raison qu'on demande la condition d'absolue convergence dans la définition ci-dessous : on veut que l'ordre de sommation n'influe ni sur l'existence de l'espérance ni sur sa valeur.

Définition 2.9

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs entières.
On dit que X admet une **espérance** si la série $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente.
Dans ce cas, son **espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, est égale à la somme de cette série.

Remarque 2.10

Toute variable aléatoire finie admet une espérance. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

En particulier, toute variable aléatoire X constante (égale à C) admet une espérance (égale à C).

Exemple 2.11 – ♥

Montrer que la variable aléatoire X définie ci-dessous n'admet pas d'espérance.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Démonstration. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|n\mathbb{P}(X = n)| \geqslant 0$ et :*

$$|n\mathbb{P}(X = n)| = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |n\mathbb{P}(X = n)|$ diverge aussi en vertu du critère d'équivalence de séries à termes positifs. On en déduit que X n'admet pas d'espérance. □

Exemple 2.12 – ♥

Montrer que la variable aléatoire X définie ci-dessous admet une espérance égale à $\mathbb{E}(X) = 3$.

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Démonstration. *Soit $N \in \mathbb{N}$.*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} |k\mathbb{P}(X = k)| &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{n(n-1)+n}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Puisque les séries géométriques dérivées $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont de raison $\frac{1}{2}$, elles convergent $\left(\frac{1}{2} \in]-1, 1[\right)$. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |n\mathbb{P}(X = n)|$ converge, i.e. X admet une espérance. Par positivité de X et passage à la limite, on trouve que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 3.$$

□

2.2.2 Propriétés

Comme pour toute notion de moyenne, on attend de l'espérance qu'elle se comporte bien vis-à-vis des opérations usuelles : sommes, multiples, comparaisons. C'est l'objet des propriétés suivantes.

Théorème 2.13 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance. Alors :

1. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X).$$
2. la variable aléatoire $X + Y$ admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration admise.

Corollaire 2.14

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Alors :

1. pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,
2. la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est **centrée**, i.e. d'espérance nulle.

Théorème 2.15 – Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant une espérance.
Si X est presque sûrement positive (on note $X \geqslant 0$ p.s.) alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
Si de plus $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $X = 0$ p.s.

Corollaire 2.16 – Croissance de l'espérance

Soient X et Y des variables aléatoires réelles admettant une espérance.
Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration admise (Il suffit d'appliquer la positivité et la linéarité de l'espérance à $Y - X$).

Théorème 2.17 – Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire discrète et soit f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.
La variable $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}\left(f(X)\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration admise.

Le théorème du transfert porte bien son nom : il *transfère* la connaissance de la loi de $f(X)$ à celle de la loi de X

dans le problème de l'existence et du calcul de l'espérance de $f(X)$.

Exemple 2.18 – Exemple fondamental

Si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X=x)$ converge, alors X^2 admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X=x).$$

Méthode 2.19 – Déterminer l'existence et la valeur de l'espérance

Pour étudier l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire discrète X (puis la calculer), on suit les étapes suivantes.

1. Si X s'écrit comme une combinaison linéaire de variables aléatoires dont on connait l'espérance, on applique la linéarité de l'espérance.
2. Si X s'écrit comme une fonction d'une variable aléatoire Y, on peut chercher à appliquer le théorème du transfert.
   Cette méthode est particulièrement efficace si $X = Y^2$ et si on connait la variance de Y.
3. Sinon, on applique la définition : on passe par les sommes partielles puis on calcule leur limite.
   On rappelle que si X n'est pas positive mais infinie, il faut vérifier la convergence absolue d'une série.

Exemple 2.20 – ♥

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par : $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
Montrer que $Y = \exp(X)$ admet une espérance qu'on calculera.

Démonstration. *Le théorème du transfert nous amène à étudier la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\exp(k)\mathbb{P}(X=k)|$. Soit $n\in\mathbb{N}$.*

$$\sum_{k=0}^{n} |\exp(k)\mathbb{P}(X=k)| = \sum_{k=0}^{n} e^k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(e\lambda)^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}e^{e\lambda} = e^{\lambda(e-1)},$$

en reconnaissant une série exponentielle. D'après le théorème du transfert, la variable aléatoire $Y = \exp(X)$ admet une espérance, égale (par positivité de Y) à :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n}\exp(k)\mathbb{P}(X=k) = e^{\lambda(e-1)}.$$

□

Exemple 2.21 – Quelle stratégie utiliser ?

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = (X+1)^2$ où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $p\in]0,1[$.

Exercice à la maison 2.22 – Utilisation de la linéarité, avec glissement d'indice

Soit $p\in]0,1[$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X de loi donnée par :

$$\forall k\geqslant -1,\ \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k+1}.$$

Indication : on pourra commencer par étudier la variable aléatoire $Y = X+2$.

2.3 Variance d'une variable aléatoire réelle

L'espérance est un paramètre de position des lois, qui généralise la notion de « moyenne ». Cependant, deux variables aléatoires de même espérance peuvent suivre des lois très différentes : l'une très concentrée autour de sa moyenne, l'autre très dispersée. La variance mesure précisément cet écart moyen (au carré) à l'espérance.

Définition 2.23

On dit qu'une variable aléatoire réelle X admet une **variance** si la variable $\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2$ admet une espérance. Dans ce cas, on appelle **variance** et **écart-type** de X les réels $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2\right)$ et $\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Définition 2.24

On dit qu'une variable aléatoire réelle X admet un **moment** d'ordre r si la variable X^r admet une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r le réel $\mu_r(X)=\mathbb{E}\left(X^r\right)$.

Lemme 2.25

Si une variable aléatoire *discrète* X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Démonstration. *Pour tout réel x, on a $(|x|-1)^2\geqslant 0$, i.e. $x^2+1\geqslant 2|x|$, donc $|x|\leqslant\dfrac{1+x^2}{2}$.*

Ainsi, pour tout $x\in X(\Omega)$, $|x|\mathbb{P}(X=x)\leqslant\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X=x)+\dfrac{1}{2}x^2\mathbb{P}(X=x)$. Les séries $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)$ et $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}x^2\mathbb{P}(X=x)$ convergent, donc la série $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}\left(\frac{1}{2}\mathbb{P}(X=x)+x^2\mathbb{P}(X=x)\right)$ converge par linéarité de la somme. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}|x|\mathbb{P}(X=x)$ converge par comparaison de séries à termes positifs. On en déduit alors que X admet une espérance. □

En pratique, on ne calcule presque jamais la variance directement à partir de sa définition (ce qui nécessiterait de développer $\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2$) : la formule de König-Huygens, ci-dessous, ramène tout au calcul de deux espérances.

Théorème 2.26 – Formule de König-Huygens

Une variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, elle admet une variance. Dans ce cas, on a la formule suivante :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. *Supposons que X admette un moment d'ordre 2, i.e. X^2 admet une espérance. En développant :*

$$\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2=X^2-2\mathbb{E}(X)X+\mathbb{E}(X)^2.$$

Le membre de droite est une combinaison linéaire des variables aléatoires X^2, X et 1, qui admettent toutes une espérance ; par linéarité, $\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2$ admet donc une espérance, i.e. X admet une variance, et :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)^2=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2.$$

La réciproque s'obtient en remontant le même calcul. □

Méthode 2.27 – Déterminer l'existence et la valeur de la variance

Pour étudier l'existence de la variance d'une variable aléatoire discrète X (puis la calculer), on suit les étapes suivantes.

1. Si X s'écrit comme une somme de variables aléatoires indépendantes dont on connait la variance, on obtient immédiatement l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X)$ (cf. chapitres ultérieurs)
2. Sinon, on commence par calculer l'espérance de X (si elle existe).
   On applique ensuite le théorème du transfert pour calculer $\mathbb{E}(X^2)$ si elle existe.
   On applique enfin la formule de König-Huygens pour calculer la variance de X.

Propriété 2.28

Si une variable aléatoire réelle X admet une variance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Une conséquence utile de cette dernière propriété est qu'on peut toujours ramener une variable aléatoire (non constante p.s.) à une variable d'espérance nulle et de variance 1, par un simple changement d'échelle affine.

Propriété 2.29 – Variable aléatoire centrée réduite

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance non nulle. On note $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.
La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à** X, est centrée et réduite, i.e. d'espérance nulle et de variance égale à 1.

3 Lois discrètes usuelles

Certaines lois reviennent si souvent en pratique qu'il est indispensable de les connaître par cœur : univers-image, loi de probabilité, espérance, variance, et un moyen de les simuler en Python. C'est l'objet de cette dernière section.

3.1 Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$

Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$
Univers-image	$X(\Omega) = [\![a, b]\!]$
Loi de probabilité	$\forall k \in [\![a, b]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a + b}{2}$

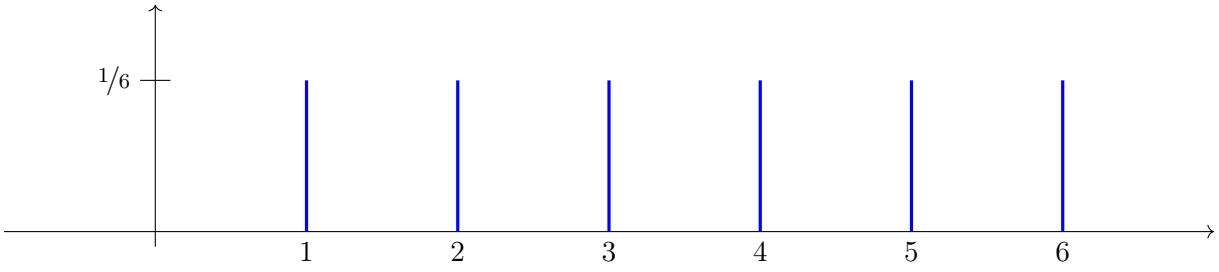


FIGURE 1 – Graphe de la distribution de la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, 6]\!])$

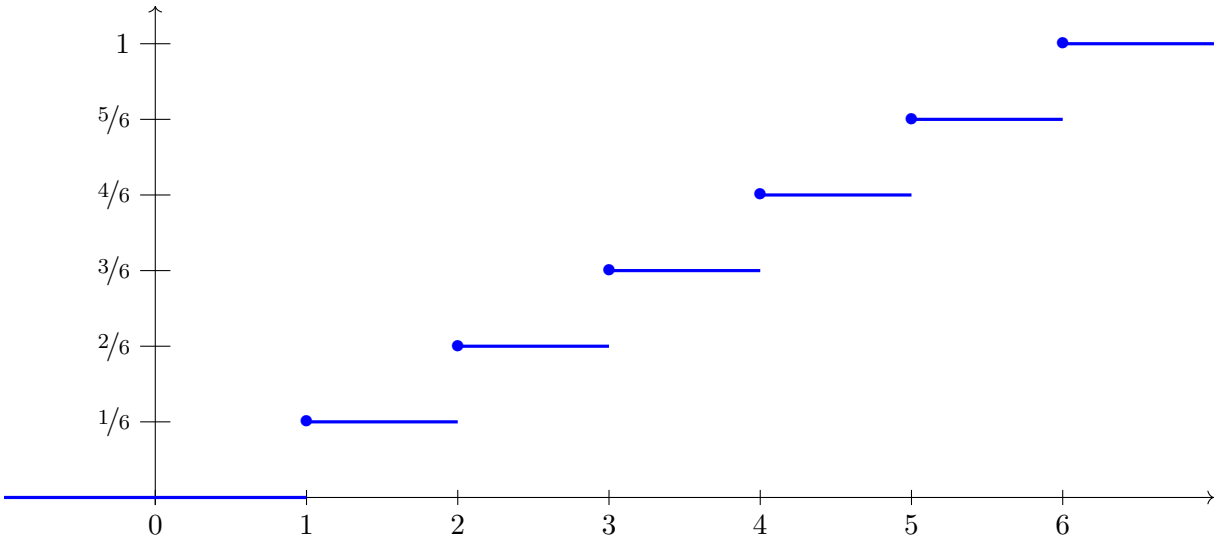


FIGURE 2 – Graphe de la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, 6]\!])$

Méthode 3.1 – Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$

La fonction `randint` du module `random` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$

```
import random as rd
x = rd.randint(a, b)
```

3.2 Lois de Bernoulli

Les lois de Bernoulli modélisent la situation la plus élémentaire qui soit : une expérience à deux issues, succès ou échec. Ces sont les briques de base à partir desquelles on construira les lois binomiale et géométrique.

Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
Univers-image	$X(\Omega) = \{0;1\}$
Loi de probabilité	$\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = p$
Variance	$\mathbb{V}(X) = p(1-p) = pq$

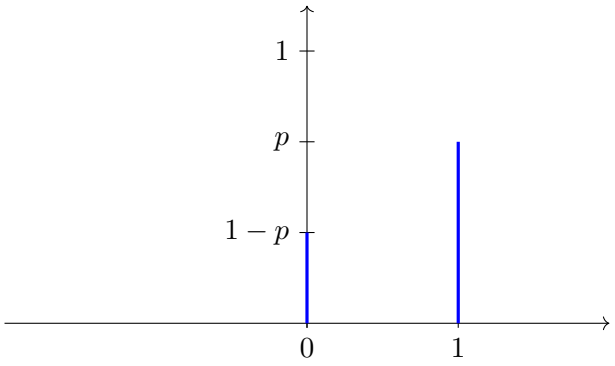


FIGURE 3 – Graphe de la distribution de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

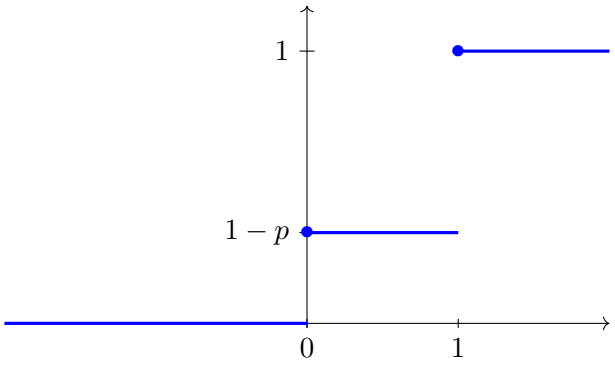


FIGURE 4 – Graphe de la fonction de répartition de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Remarque 3.2

Si une variable aléatoire X admet pour univers-image l'ensemble $\{0,1\}$, alors elle suit nécessairement la loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X=1)$.

Plus généralement, si on sait qu'une variable aléatoire X suit une loi usuelle, la seule connaissance de son univers-image permet de considérablement réduire les lois candidates.

Méthode 3.3 – Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Si X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$, l'événement $[X \leqslant p]$ (où $p \in]0,1[$) est de probabilité p. On peut alors écrire une fonction simulant la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p à l'aide de la fonction `random` du module `random` :

```
def bernoulli(p):
    if rd.random()<p:
        return 1
    else:
        return 0
```

3.3 Lois binomiales

Loi de binomiale de paramètres n et p	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
Univers-image	$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
Loi de probabilité	$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = np$
Variance	$\mathbb{V}(X) = np(1-p) = npq$

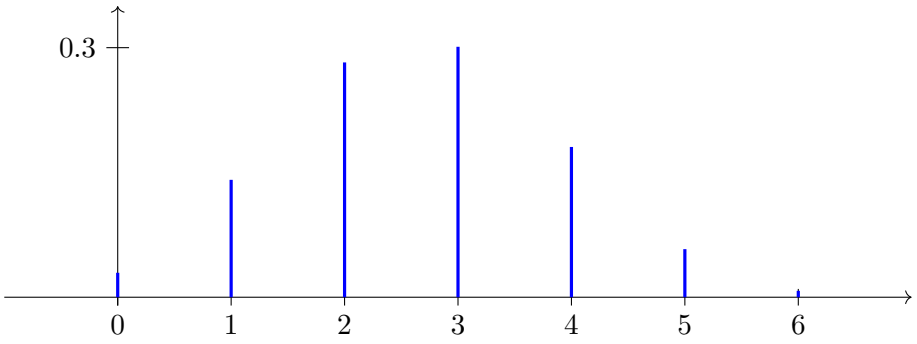


FIGURE 5 – Graphe de la distribution de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \frac{4}{9}\right)$

Théorème 3.4

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors leur somme, la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Démonstration admise (cf. chapitre « Couple de variables aléatoires discrètes »).

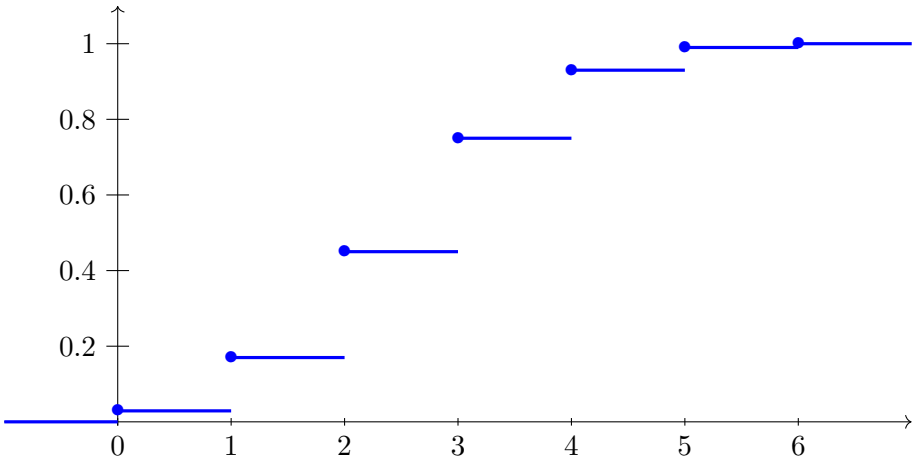


FIGURE 6 – Graphe de la fonction de répartition de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \frac{4}{9}\right)$

Exemple 3.5 – Exemple fondamental

On considère une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir face (succès) est égale à $p \in]0,1[$. On lance n fois cette pièce (on suppose les lancers indépendants) et on note X la variable aléatoire égale au nombre de faces (succès) obtenues. La variable X est le nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre p ; elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et p.

Méthode 3.6 – Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

À l'aide du résultat ci-dessus et de la simulation d'une loi de Bernoulli, on peut écrire :

```
import random as rd

def binomiale(n, p):
    somme = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < p:
            somme += 1
    return somme
```

Remarque 3.7 – Attention !

Le code ci-dessous ne permet pas de simuler une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

```
def not_binomiale(n, p):
    somme = 0
    x = rd.random()
    for k in range(n):
        if x < p:
            somme += 1
    return somme
```

En effet, on ne tire qu'un seul entier aléatoire (0 ou 1) ; il n'y a donc pas indépendance des expériences répétées. La variable aléatoire simulée ici ne peut alors prendre que deux valeurs : n avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$.

3.4 Loi géométrique

Changeons de question : au lieu de fixer le nombre de répétitions et de compter les succès, comptons plutôt le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir un premier succès. C'est la loi géométrique.

Définition 3.8

Soit p un réel de l'intervalle $]0,1[$. On note $q = 1-p$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = q^{k-1}p \qquad (\text{où } q = 1-p). \end{cases}$$

Remarque 3.9

La série géométrique $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} q^{k-1}$ (de raison $q \in]0,1[$) converge et a pour somme $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$.
Ainsi la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X=k)$ converge et a pour somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1.$$

Théorème 3.10 – Loi du premier succès ♥

On note X la variable aléatoire égale au **rang du premier succès** lors de la répétition (éventuellement infinie) d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$.
La variable X, appelée **temps d'attente** du premier succès, suit la loi géométrique de paramètre p.
De plus, l'événement $[X = +\infty]$ correspondant à une infinité d'échecs sans aucun succès est de probabilité nulle.

Démonstration. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons S_k l'événement « on obtient un succès à la k-ème expérience de Bernoulli ». Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :*

$$[X=n] = \overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n.$$

Par indépendance des expériences de Bernoulli, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p.$$

On a déjà démontré dans le chapitre « probabilités discrètes » que l'événement $[X = +\infty]$ est de probabilité nulle, ce qu'on retrouve ici rapidement par le calcul :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 0.$$

□

Théorème 3.11 –

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Démonstration.

- *Existence et calcul de l'espérance.*
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une série géométrique dérivée de raison q donc convergente (car $q \in]-1,1[$), on trouve :
  $$\sum_{k=1}^{n} |k\mathbb{P}(X=k)| = p\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$
  La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument donc X admet une espérance. Par positivité de X, on trouve que :
  $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{p}.$$
- *Existence et calcul de la variance.*
  Montrons tout d'abord que X admet un moment d'ordre 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant des séries géométriques dérivées de raison q donc convergente (car $q \in]-1,1[$), on trouve :
  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |k^2\mathbb{P}(X=k)| &= p\sum_{k=1}^{n}[k(k-1)+k]q^{k-1} \\ &= pq\sum_{k=1}^{n} k(k-1)q^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} pq \times \frac{2}{(1-q)^3} + p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}.\end{aligned}$$
  La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, donc la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 en vertu du théorème du transfert et :
  $$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}.$$
  On en déduit que X admet une variance, donnée par la formule de König-Huygens :
  $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

□

Loi géométrique de paramètre p	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
Univers-image	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
Loi de probabilité	$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = q^{k-1}p$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
Variance	$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$

Méthode 3.12 – Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique

Le théorème 3.10 permet d'écrire une fonction simulant la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

```
import random as rd

def geometrique(p):
    rang = 1
    while rd.random()>p:
        rang += 1
    return rang
```

3.5 Loi de Poisson

Définition 3.13

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{cases}$$

Remarque 3.14

On remarque que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge (série exponentielle) pour tout $\lambda > 0$ et a pour somme e^{λ}.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k)$ converge et a pour somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

Théorème 3.15 –

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration.

- *Existence et calcul de l'espérance.*
  Soit $n \in \mathbb{N}$. En reconnaissant une série exponentielle (donc convergente), on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} |k\mathbb{P}(X=k)| = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = \lambda.$$

  La série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument donc X admet une espérance. Par positivité de X, on trouve :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \lambda.$$

- *Existence et calcul de la variance.*
  Montrons tout d'abord que X admet un moment d'ordre 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En reconnaissant des séries exponentielles (donc convergentes), on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |k^2\mathbb{P}(X=k)| &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} [k(k-1)+k]\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

  La série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, donc la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 en vertu du théorème du transfert et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda.$$

On en déduit que X admet une variance, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda.$$

□

Loi de Poisson de paramètre λ	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
Univers-image	$X(\Omega) = \mathbb{N}$
Loi de probabilité	$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \lambda$
Variance	$\mathbb{V}(X) = \lambda$

Méthode 3.16 – Simulation d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson

La fonction `random.poisson` du module `numpy` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi de Poisson dont le paramètre est donné en argument :

```
import numpy as np

def simule_Poisson(lam):
    return np.random.poisson(lam)
```

Le nom `lambda` est réservé en Python, on ne l'utilisera pas pour nommer une variable.

Exemple 3.17 – Exemples

Une loi de Poisson permet de décrire le nombre d'évènements d'un certain type se produisant dans une période de temps. On dit que les lois de Poisson sont les "*lois des évènements rares*".
On modélise souvent :

- le nombre de clients se présentant dans un magasin pendant une période T,
- le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une période T,

par la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est le nombre moyen d'événements pendant la période T.

Démonstrations à connaitre

- Théorème 1.8 : inégalité de Markov
- Théorème 1.9 : inégalité de Bienaymé-Tchebytchev
- Exemple 2.7 (détermination de la loi d'une variable aléatoire via sa fonction de répartition)
- Exemple 1.11 (utiliser les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebytchev)
- Exemple 2.11 (montrer qu'une variable aléatoire n'admet pas d'espérance)
- Exemple 2.12 (montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance et la calculer)
- Exemple 2.20 (appliquer le théorème du transfert)
- Théorème 3.10 : loi du premier succès
- Théorème 3.11 : espérance et variance d'une loi géométrique
- Théorème 3.15 : espérance et variance d'une loi de Poisson