1 Détermination de la loi d'une variable aléatoire discrète

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X, on suit les étapes suivantes.

(i) On commence par déterminer son univers-image $X(\Omega)$.

(ii) On cherche ensuite à calculer, pour tout $k \in X(\Omega)$, la probabilité de l'événement $[X = k]$.

- On peut introduire des événements (plus simples) permettant de décrire l'événement $[X = k]$.
- Si la variable X s'écrit comme fonction d'une variable aléatoire Y dont on connait la loi, on cherche à écrire l'événement $[X = k]$ en fonction de Y (et k).
- Si X est à valeurs entières, on peut chercher à calculer la probabilité des événements $[X \leqslant k]$ et $[X \leqslant k-1]$ (ou bien $[X \geqslant k]$ et $[X \geqslant k+1]$) et obtenir $\mathbb{P}(X = k)$ par différence :

$$[X = k] = [X \leqslant k] \setminus [X \leqslant k-1] = [X \geqslant k] \setminus [X \geqslant k+1].$$

Exercice 1. *On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile est p. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile ?*

L'univers-image de X est $[\![r, +\infty[\![$. Soit $k \in [\![r, +\infty[\![$. En notant P_k l'événement "on obtient pile au i-ème tirage" et A_{k-1} l'événement "on obtient $(r-1)$ fois pile sur les $k-1$ premiers tirages", on a : $[X = k] = A_{k-1} \cap P_k$.

Par indépendance des tirages, on a $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A_{k-1})\mathbb{P}(P_k) = p\mathbb{P}(A_{k-1})$.

La probabilité d'obtenir $(r-1)$ fois pile en $(k-1)$ tirages **dans un ordre donné** est égale à $p^{r-1}(1-p)^{k-r}$, par indépendance des tirages. Puisqu'il y a $\binom{k-1}{r-1}$ tirages permettant d'obtenir exactement $(r-1)$ fois pile en $(k-1)$ tirages, on trouve que $\mathbb{P}(A_{k-1}) = \binom{k-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}$. La loi de X est donc donnée par :

$$\forall k \geqslant r,\ \mathbb{P}(X = k) = p\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r} = \binom{k-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}.$$

Exercice 2. *Reconnaitre la loi de la variable $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $p \in]0,1[$.*

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$[Y = k] = \left[\left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor = k\right] = \left[k \leqslant \frac{X+1}{2} < k+1\right] = [2k-1 \leqslant X < 2k+1] = [X = 2k-1] \cup [X = 2k],$$

la dernière égalité étant obtenue car X est à valeurs entières.

Par incompatibilité des événements, on a :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k-1) + \mathbb{P}(X = 2k) = p(1-p)^{2k-2} + p(1-p)^{2k-1} = p(2-p)(1-p)^{2k-2} = p(2-p)\left((1-p)^2\right)^{k-1}.$$

Puisque $1 - p(2-p) = 1 - 2p + p^2 = (1-p)^2$, Y suit la loi géométrique de paramètre $p(2-p)$.

Exercice 3. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n) > 0$. On suppose que X est à taux de panne constant égal à $\lambda \in [0,1[$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{[X \geqslant n]}(X = n) = \lambda$. Quelle est la loi de X ?*

D'après l'énoncé, on a immédiatement : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(X = n) = \lambda\mathbb{P}(X \geqslant n)$. Ainsi, puisque $[X \geqslant n+1] = [X \geqslant n] \setminus [X = n]$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant n+1) = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X = n) = (1-\lambda)\mathbb{P}(X \geqslant n).$$

La suite $(\mathbb{P}(X \geqslant n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $1-\lambda$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{P}(X \geqslant 1)(1-\lambda)^{n-1} = (1-\lambda)^{n-1}$ car $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1) = (1-\lambda)^{n-1} - (1-\lambda)^{n} = \lambda(1-\lambda)^{n-1}.$$

La variable X suit donc la loi géométrique de paramètre λ.

2 Détermination de l'espérance d'une variable aléatoire discrète

Pour étudier l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire discrète X (puis la calculer), on suit les étapes suivantes.

(i) Si X s'écrit comme une combinaison linéaire de variables aléatoires dont on connait l'espérance, on applique la linéarité de l'espérance.

(ii) Si X s'écrit comme une fonction d'une variable aléatoire Y, on peut chercher à appliquer le théorème du transfert.
Cette méthode est particulièrement efficace si $X = Y^2$ et si on connait la variance de Y.

(iii) Sinon, on applique la définition : on passe par les sommes partielles puis on calcule leur limite.
On rappelle que si X n'est pas positive, il faut vérifier la convergence absolue d'une série.

Exercice 4. *Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X de loi donnée par : $\forall k \geqslant -1,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k+1}$, où $p \in]0,1[$.*

La variable aléatoire $X + 2$ suit la loi géométrique de paramètre p. En effet :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X + 2 = i) = \mathbb{P}(X = i - 2) = p(1-p)^{(i-2)+1} = p(1-p)^{i-1}.$$

Puisque $X + 2$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X + 2) = \dfrac{1}{p}$, la variable aléatoire $X = (X + 2) - 2$ admet une espérance par linéarité et :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X + 2) - 2 = \frac{1}{p} - 2.$$

Exercice 5. *Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = (X + 1)^2$ où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $p \in]0,1[$.*

On a : $Y = X^2 + 2X + 1$. Puisque X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2. Ainsi, Y admet une espérance par linéarité et :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X) + 1.$$

D'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \dfrac{1-p}{p^2} + \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2-p}{p^2}$ et :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2-p}{p^2} + \frac{2}{p} + 1 = \frac{2+p}{p^2} + 1.$$

Exercice 6. *Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Z de loi donnée par : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$.*

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} |k\mathbb{P}(Z = k)| = \sum_{k=0}^{N} \frac{k^2}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{k(k+1) - k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{k(k+1)}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{(k+1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e - 1,
\end{aligned}$$

(on reconnait une somme partielle de série exponentielle et on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 1$).

La variable aléatoire Z admet donc une espérance, égale à $\mathbb{E}(Z) = e - 1$.

3 Détermination de la variance d'une variable aléatoire discrète

Pour étudier l'existence de la variance d'une variable aléatoire discrète X (puis la calculer), on suit les étapes suivantes.

(i) Si X s'écrit comme une somme de variables aléatoires indépendantes dont on connait la variance, on obtient immédiatement l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

(ii) Sinon, on commence par calculer l'espérance de X (si elle existe).

On applique ensuite le théorème du transfert pour calculer $\mathbb{E}(X^2)$ si elle existe.

On applique enfin la formule de König-Huygens pour calculer la variance de X.

Exercice 7. *Déterminer la variance de la variable X de loi donnée par :* $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n+1)}$.

La variable aléatoire X est finie ($X(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$) donc elle admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n+1)} \\
&= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{2}{n+1}\frac{n(n-1)}{2} - \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\
&= \frac{(n-1)[3n-(2n-1)]}{3(n+1)} \\
&= \frac{n-1}{3}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème du transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k^2(n-k)}{n(n+1)} \\
&= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \\
&= \frac{2}{n+1}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{2}{n(n+1)}\frac{n^2(n-1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n-1)[2(2n-1)-3(n-1)]}{6(n+1)} \\
&= \frac{n(n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

On applique enfin la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{n(n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2}{9} \\
&= \frac{(n-1)[3n-2(n-1)]}{18} \\
&= \frac{(n-1)(n+1)}{18}.
\end{aligned}$$