Exercice 1

```python
def conway(ch):
    next = ""
    i = 0
    while i < len(ch):
        count = 1
        while i < len(ch)-1 and ch[i] == ch[i + 1]:
            count += 1
            i += 1
        next += str(count) + ch[i]
        i += 1
    return next
```

Exercice 2

Calculons le rang de la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathcal{F}) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow L_4 \leftarrow L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-2a & 1 \\ 0 & 1-2a & a \\ 0 & -a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - aL_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1-2a \\ 0 & a & 1-2a \\ 0 & 1 & -a^2 \end{pmatrix} C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1-2a \\ 0 & 0 & (1-2a)(1-a) \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_2 \\ L_3 \leftarrow -L_4 + L_2 \end{matrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 1 \\ 3 & \text{si } 1-2a = 0 \text{ i.e. } a = \dfrac{1}{2} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si, $a \neq 1$. De plus, l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$ est de dimension 3 si $a \neq 1$ et de dimension 2 si $a = 1$.

Après résolution de l'équation $x(1,1,2,2) + y(0,1,1,1) + z(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$, on trouve que $-(1,1,2,2) + (0,1,1,1) + (1,0,1,1) = (0,0,0,0)$.

Exercice 3

1. Par définition, les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   La matrice nulle 0_n est symétrique et antisymétrique : $0_n^T = 0_n = -0_n$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$.

   $$(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B.$$

   On en déduit que $\lambda A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(C,D) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.

   $$(\lambda C + D)^T = \lambda C^T + C^T = -\lambda C - D = -(\lambda C + D)$$

   On en déduit que $\lambda C + D \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   Les sous-ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc bien des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

   Analyse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $(S,A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

   Ainsi $M^T = S^T + A^T = S - A$. On trouve alors que :

   $$S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) \text{ et } A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right),$$

   garantissant l'unicité du couple (S,A).

   Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons :

   $$S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) \text{ et } A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right),$$

   En remarquant que $S + A = M$, $S^T = S$ et $A^T = -A$, on trouve bien que M s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

   On en déduit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{S}_\ni(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b \\ g = c \\ h = f \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & j \end{pmatrix},\ (a,b,c,e,f,j) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\ &= \left\{ aE_{1,1}+b(E_{1,2}+E_{2,1})+c(E_{1,3}+E_{3,1})+eE_{2,2}+f(E_{2,3}+E_{3,2})+jE_{3,3},\ (a,b,c,e,f,j)\in\mathbb{R}^6 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3}+E_{3,2}, E_{3,3}\right).\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}& aE_{1,1}+b(E_{1,2}+E_{2,1})+c(E_{1,3}+E_{3,1})+eE_{2,2}+f(E_{2,3}+E_{3,2})+jE_{3,3} = 0_3 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & j \end{pmatrix} = 0_3 \\ \Leftrightarrow & \ a = b = c = e = f = j = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,2}, E_{2,3}+E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 6.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{A}_\ni(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e = j = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix},\ (b,c,f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b(E_{1,2}-E_{2,1})+c(E_{1,3}-E_{3,1})+f(E_{2,3}-E_{3,2}),\ (b,c,f)\in\mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(E_{1,2}-E_{2,1}, E_{1,3}-E_{3,1}, E_{2,3}-E_{3,2}\right).\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} b(E_{1,2}-E_{2,1})+c(E_{1,3}-E_{3,1})+f(E_{2,3}-E_{3,2}) = 0_3 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\ &\Leftrightarrow b = c = f.\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(E_{1,2}-E_{2,1}, E_{1,3}-E_{3,1}, E_{2,3}-E_{3,2})$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 3.

4. On vérifie de la même manière qu'à la question précédente que la famille

$$(E_{i,j}-E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$$

est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$. En effet :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1 = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^{n}(j-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

On vérifie de la même manière qu'à la question précédente que la famille

$$(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n} \bigcup (E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$$

est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 4

1. a. Soit F l'événement "la banane est en plastique".

Remarquons que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(T_i) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}_{T_i}(F) = \dfrac{i}{n+1}$ par équiprobabilités des tirages. Puisque la famille $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(T_i)\times\mathbb{P}_{T_i}(F) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que la banane soit en plastique est donc égale à $\dfrac{1}{2}$.

b. Avec les mêmes notations que précédemment, on cherche à calculer $\mathbb{P}_F(T_i)$. Par définition, on a :

$$\mathbb{P}_F(T_i) = \frac{\mathbb{P}(F \cap T_i)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(T_i)\,\mathbb{P}_{T_i}(F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{1}{n} \times \frac{i}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

La probabilité qu'elle vienne du tas n°i sachant qu'elle est en plastique est $\dfrac{2i}{n(n+1)}$.

2. a. (i) On note M_k l'événement "Bernard a tiré une banane mangeable au k-ème tirage". On cherche donc la probabilité de l'événement $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ sachant qu'il a choisi le tas n°i.
Puisqu'il y a remise après chaque tirage, on peut donc considérer les tirages comme mutuellement indépendants, **une fois le tas n°i fixé**. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{T_i}(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = \mathbb{P}_{T_i}(M_1) \times P_{T_i}(M_2) \times \mathbb{P}_{T_i}(M_3) = \left(\frac{n+1-i}{n+1}\right)^3.$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables sachant que Bernard a choisi le tas n°i est $\left(\dfrac{n+1-i}{n+1}\right)^3$.

(ii) Puisque la famille $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements, on en déduit, d'après la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap M_3) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i)\,\mathbb{P}_{T_i}(M_1 \cap M_2 \cap M_3)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{(n+1-i)^3}{(n+1)^3}\\
&= \frac{1}{n(n+1)^3}\sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \text{(en posant } k = n-i)\\
&= \frac{1}{n(n+1)^3} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{n}{4(n+1)}.
\end{aligned}$$

La probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables est égale à $\dfrac{n}{4(n+1)}$.

b. Avec les notations précédentes, on peut écrire A comme la réunion disjointe suivante :

$$A = \left(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3\right) \cup \left(\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}\right) \cup \left(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}\right).$$

En effet, si Bernard a tiré exactement deux bananes en plastique, alors il a tiré une banane mangeable ou bien au premier tirage, ou bien au second ou bien au troisième.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la formule des probabilités composées - ou l'indépendance des tirages sous la loi $\mathbb{P}_{T_i}$ - (appliquée trois fois) assure que :

$$\mathbb{P}_{T_i}\left(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3\right) = \mathbb{P}_{T_i}\left(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}\right) = \mathbb{P}_{T_i}\left(\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}\right) = \frac{i^2(n+1-i)}{(n+1)^3}.$$

Ainsi en appliquant successivement la formule des probabilités totales aux événements $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3$, $M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}$ et $\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= P\left(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3\right) + P\left(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}\right) + P\left(\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}\right)\\
&= 3\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{i^2(n+1-i)}{(n+1)^3}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{3i^2}{n(n+1)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{3i^3}{n(n+1)^3}\\
&= \frac{3}{n(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{3}{n(n+1)^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\\
&= \frac{3}{n(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{n(n+1)^3} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{2n+1}{2(n+1)} - \frac{3n}{4(n+1)}\\
&= \frac{n+2}{4(n+1)}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3i^2(n+1-i)}{n(n+1)^3} = \frac{n+2}{4(n+1)}.}$$

3. a. Notons B l'événement "Bernard a tiré k bananes mangeables".
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il y a $\binom{n+1-i}{k}$ façons de tirer simultanément k bananes mangeables dans le tas n°i.
Par équiprobabilités des tirages simultanés, et puisqu'il y a $\binom{n+1}{k}$ tirages au total, on trouve :

$$\mathbb{P}_{T_i}(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n+1-i \\ \dfrac{\binom{n+1-i}{k}}{\binom{n+1}{k}} & \text{si } k \leqslant n+1-i \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > n+1-k \\ \dfrac{\binom{n+1-i}{k}}{\binom{n+1}{k}} & \text{si } i \leqslant n+1-k \end{cases}$$

Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales avec le même système complet d'événements, on trouve :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i)\, \mathbb{P}_{T_i}(B) = \frac{1}{n\binom{n+1}{k}} \sum_{i=1}^{n+1-k} \binom{n+1-i}{k} \underset{j=n+1-i}{=} \frac{1}{n\binom{n+1}{k}} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}.$$

La probabilité que Bernard ait tiré simultanément k bananes en plastique est :

$$\boxed{\frac{1}{n\binom{n+1}{k}} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}.}$$

b. $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \geqslant k$.

- Initialisation : pour $n = k$, on a

$$\sum_{i=k}^{k} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}.$$

La récurrence est initialisée.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant k$. On suppose que $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Alors :

$$\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k} + \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant k,\ \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.}$$

Le résultat est en particulier vrai pour $n \geqslant 3$.

On pouvait aussi montrer directement la propriété grâce à la formule du triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

c. On en déduit alors que :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{n\binom{n+1}{k}} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n\binom{n+1}{k}} = \frac{n+1-k}{n(k+1)}.}$$

* *
*