Exercice 1

Une suite de Conway est une suite de nombres (qu'on modélise ici par des chaînes de caractères) où chaque terme se construit en énumérant chaque chiffre/caractère du terme précédent et combien de fois il se répète. Par exemple, le terme suivant `a="111221"` est la chaîne de caractères `b="311211"` car dans la lecture (de gauche à droite) des caractères de `a`, on trouve trois fois le caractère `"1"`, deux fois le chiffre `"2"` et une fois le caractère `"1"`.

Compléter le code de la fonction ci-dessous qui prend en argument une chaîne de caractères représentant un terme d'une suite de Conway et qui renvoie la chaîne de caractères représentant le terme suivant.

```python
def conway(ch):
    next= ""
    i = ...
    while i < ...:
        count = ...
        while i < ... and ch[i] == ch[i+1]:
            ...
            ...
        next += ...
        ...
    return ...
```

On rappelle que la fonction `str` *convertit un nombre (mais pas seulement) en chaîne de caractères. Par exemple, l'instruction* `str(123)` *renvoie* `"123"`.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier, selon les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F} = ((a,1,2,2),(0,a,1,1),(1,0,a,1))$. Déterminer selon les valeurs de a, la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. On précisera les relations de liaison lorsque la famille est liée.

Exercice 3

On dit qu'une matrice carrée est symétrique (resp. antisymétrique) si elle est égale (resp. opposée) à sa transposée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note respectivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et et l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\} \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 6 et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 3.
4. Bonus : donner sans justification les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Le cirque où travaillent les singes Albert et Bernard décide de nourrir ses ouistitis. On leur donne n tas de $n+1$ bananes. Albert, qui trouve que Bernard mange trop, a décidé de lui jouer un tour (ils sont espiègles ces ouistitis !) : il a remplacé certaines bananes par des imitations en plastique plus vraies que nature. Plus précisément, dans le tas n°i, il a remplacé i bonnes bananes bien mûres par i bananes en plastique immangeables.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le tas n°i contient donc $n+1$ bananes, dont i en plastique et $n+1-i$ vraies bananes. Dans tout l'exercice, on pourra utiliser les événements T_i : "Bernard a choisi le tas n°i", ainsi que tout événement que vous définirez correctement.

1. Bernard a faim. Il choisit un tas au hasard puis en tire une banane au hasard.

   a. Déterminer la probabilité que la banane soit en plastique.

   b. La banane est en plastique. Calculer la probabilité qu'elle vienne du tas n°i.

2. Bernard trouve ça bizarre, ces bananes en plastique. Il choisit un tas au hasard, et y tire successivement trois bananes, en les remettant dans le tas après les avoir tirées.

   a. (i) Déterminer, en fonction de $i \in [\![1, n]\!]$, la probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables sachant que Bernard a choisi le tas n°i.

   (ii) En déduire la probabilité d'avoir obtenu trois bananes mangeables. (On donnera une expression ramassée de la somme)

   b. Soit A l'événement "Bernard a tiré exactement deux bananes en plastique". Montrer que :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3i^2(n+1-i)}{n(n+1)^3}.$$

   puis calculer $\mathbb{P}(A)$.

3. Bernard commence à avoir très faim. Il choisit un tas au hasard, et en tire simultanément k bananes simultanément.

   a. Calculer la probabilité que Bernard ait k bananes mangeables. (On gardera le résultat sous forme de somme)

   b. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 3$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

   c. Simplifier alors l'expression obtenue à la question 3.a.

* *
*