# Variables aléatoires réelles finies

**Exercice 1.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

Dans chacun des cas suivants, déterminer la loi de $X$.

1. Une urne contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On choisit 5 jetons et on note $X$ le nombre de voyelles obtenues.
2. On range aléatoirement 20 paires de chaussettes dans 3 tiroirs et on note $X$ le nombre de paires de chaussettes rangées dans le premier tiroir.
3. Un cirque contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On choisit un animal au hasard et on note $X$ son nombre de bosses.
4. On suppose qu'en cas de naissance, la probabilité d'obtenir un garçon est identique à celle d'obtenir d'une fille. On note $X$ le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.
5. On forme un jury de 6 personnes en les choisissant au hasard dans un groupe de 5 hommes et 4 femmes. On note $X$ le nombre de femmes du jury.

**Exercice 2.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

Une urne contient $n-2$ boules blanches et 2 noires ($n \geq 2$). On les tire une à une sans remise et on désigne par $X$ le rang d'apparition de la première boule noire.

Déterminer la loi de X.

**Exercice 3.** [Corrigé] ★★☆

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$ où $X$ désigne une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$.

**Exercice 4. Loi géométrique tronquée** [Corrigé] ★★☆

Soit $n$ un entier naturel non nul. Un archer dispose de $n$ flèches dans son carquois.

A chaque tir, il atteint sa cible avec une probabilité $p \in ]0;1[$. Il arrête de tirer dès qu'il a atteint sa cible ou qu'il n'a plus de flèche. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de flèches utilisées.

1. Déterminer la loi de $X$ ainsi que son espérance.
2. Calculer la probabilité que l'archer tire $k \in [\![1,n]\!]$ flèches sachant qu'il a atteint sa cible.
3. L'archer tire maintenant ses $n$ flèches et gagne $n-k+1$ euros lorsqu'il atteint la cible au $k$-ème tir. On note $Y$ le gain du joueur. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

**Exercice 5.** [Corrigé] ★★★

Une roulette est composée de $N$ secteurs numérotés de 1 à N. On lance la boule successivement et on note $R_1$, $R_2$, etc, les numéros obtenus. On s'arrête de jouer dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au précédent. On note $X_N$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers de la boule.

1. Déterminer l'univers-image de $X_N$.
2. Écrire en Python une fonction simulant la réalisation de la variable aléatoire $X_N$.
3. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_N > k)$.
4. En déduire l'espérance de $X_N$.
5. Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{E}(X_N)$.

# Inégalités de concentration

**Exercice 6.** [Corrigé] ★★☆

Soit $X$ une variable aléatoire finie à valeurs dans un intervalle $I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante sur $I$.

Montrer que : $\forall a \in I,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(f(X))}{f(a)}$.

**Exercice 7.** [Corrigé] ★★☆

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

**Exercice 8.** [Corrigé] ★★☆

Un institut de sondage a été missionné d'estimer la proportion $p$ de végétariens en France. Il interroge pour cela $n$ français. Puisque le choix des sondés s'effectue une population très grande, on admet que l'expérience peut s'apparenter à une suite de $n$ tirages indépendants avec remise. On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de végétariens sondés et on souhaite quantifier à quelle point la fréquence $\frac{X_n}{n}$ approche la proportion $p$ inconnue.

1. Déterminer la loi de $X_n$.
2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur $n$ pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une approximation de $p$ à $10^{-2}$ près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

## Variables aléatoires réelles discrètes infinies

**Exercice 9.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in ]0,1[$. On suppose que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de $Y$ conditionnellement à $[X = n]$ est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Déterminer la loi de $Y$.

**Exercice 10.** ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance qu'on calculera.

**Exercice 11.** ♡ [Corrigé] ★★☆

On considère une urne avec une boule noire et une boule blanche. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne, en ajoutant de plus une boule noire. On note Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule noire tirée.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer de boule noire ?
3. La variable $Y$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
4. La variable $Y$ admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

**Exercice 12.** [Corrigé] ★★☆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la probabilité que $X$ prenne une valeur paire.

   *Indication : on pourra exprimer le résultat en fonction de la fonction* ch : $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. En déduire la loi et l'espérance de la variable $Y = (-1)^X$.

**Exercice 13. Problème du collectionneur** [Corrigé] ★★☆

Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout $N$ images distinctes. On note $X_k$ le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et $X_N$ est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, la loi de la variable $X_{k+1} - X_k$ ?
2. En déduire l'espérance de $X_N$.

**Exercice 14.** [Corrigé] ★★★

Dans une urne figurent $N$ boules numérotées de 1 à $N$ (avec $N \geqslant 2$). On tire successivement avec remise des boules dans l'urne jusqu'à l'obtention d'une série de $k$ boules consécutives identiques ($k \geqslant 2$).

On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note $T$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'arrêt du processus.

Pour tout $i \geqslant 2$, on note $A_i$ l'événement : “le numéro tiré au $i$-ème tirage est égal au numéro du tirage précédent”.

1. Écrire en `Python` une fonction qui simule la réalisation de la variable aléatoire $T$.
2. Calculer $\mathbb{P}(T = k)$ et $\mathbb{P}(T = k+1)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(T = n+k) = \dfrac{N-1}{N^k}\mathbb{P}(T > n)$.
4. On admettra le résultat suivant (à démontrer dans cet exercice) : si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge, alors $X$ admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$
   En déduire que $T$ admet une espérance égale à $\dfrac{N^k - 1}{N - 1}$.

**Exercice 15.** [Corrigé] ★★★

On considère un entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $n$, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole comme suit.

- À chaque tirage, si les deux boules portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules tirées ne portent pas le même numéro, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $T_i$ la variable aléatoire égale à $k$ si exactement $k$ tirages ont été nécessaires pour constituer $i$ paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé permettant de modéliser l'expérience et que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i$ est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. a. Déterminer et reconnaitre la loi de $T_1$. Donner sans calcul son espérance.

b. Écrire une fonction en Python simulant la réalisation de la variable aléatoire $T_1$.

2. On pose $X_1 = T_1$ et, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.

   a. Que représente la variable $X_i$ ?

   b. Déterminer, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la loi et l'espérance de $X_i$.

   c. En déduire que $T_n$ admet une espérance et $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.

3. On effectue une série de $n$ tirages de deux boules selon le protocole précédent, et on note $S_n$ la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces $n$ tirages.

   a. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$.

   c. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = n) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

**Exercice 16.** [Corrigé] ★★★

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois "face" et au moins une fois "pile".

1. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

2. On note $X$ le nombre de lancers avant que le jeu ne cesse.

   a. Déterminer la loi de $X$.

   b. Montrer que X admet une espérance et déterminer celle-ci.

**Exercice 17. Lois discrètes sans mémoire** [Corrigé] ★★★

Montrer que si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la condition d'absence de mémoire suivante :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k),$$

alors $X$ suit une loi géométrique.

**Exercice 18.** [Corrigé] ★★★

On dispose d'une pièce déséquilibrée, amenant pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Calculer $a_1$, $a_2$, $a_3$ et $a_4$, puis montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$.

2. Exprimer $a_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Vérifier que la série de terme général $a_n$ converge et a pour somme 1. Qu'en déduire ?

4. La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

**Exercice 19.** [Corrigé] ★★★

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge, alors $X$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

2. Montrer que, si $X$ admet une espérance, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X > n)$ converge et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. Conclure.

**Exercice 20. Fonctions génératrices** [Corrigé] ★★★

On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}(t^X).$$

1. Montrer que toute fonction génératrice est définie sur $[-1, 1]$.

2. Calculer la fonctions génératrice de la variable $X$ lorsque :

   a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$,

   b. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$,

   c. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $(p \in ]0, 1[)$,

   d. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

**Corrigé de l'exercice 1.** [Énoncé]

1. Remarquons tout d'abord qu'il y a équiprobabilité des tirages et que le cardinal de l'univers de l'expérience est $\text{card}(\Omega) = \binom{26}{5}$. Remarquons ensuite que $X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$. Soit $k \in [\![0, 5]\!]$. Choisir cinq jetons dont $k$ voyelles revient à choisir $k$ voyelles parmi les 6 (il y a $\binom{6}{k}$ choix) et $5-k$ consommes parmi les 20 disponibles (il y a $\binom{20}{5-k}$ choix). Ainsi $\text{card}([X = k]) = \binom{6}{k}\binom{20}{5-k}$. La loi de $X$ est donc donnée par :
$$\forall k \in [\![0, 5]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{card}([X = k])}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{6}{k}\binom{20}{5-k}}{\binom{26}{5}}.$$
2. La variable aléatoire $X$ est égale au nombre de succès ("on range une paire dans le premier tiroir") lors de la répétition de 20 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $p = \dfrac{1}{3}$. Ainsi $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20, \dfrac{1}{3}\right)$.
3. Il y a équiprobabilité dans le choix des animaux, donc $X$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![0, 2]\!])$.
4. La variable aléatoire $X$ est égale au nombre de succès ("obtenir une fille") lors de la répétition de 3 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $p = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$.
5. Remarquons tout d'abord qu'il y a équiprobabilité des choix des individus et que le cardinal de l'univers de l'expérience est $\text{card}(\Omega) = \binom{9}{6}$. Remarquons ensuite que $X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$. Soit $k \in [\![1, 4]\!]$. Choisir 6 personnes dont $k$ femmes revient à choisir $k$ femmes parmi les 4 (il y a $\binom{4}{k}$ choix) et $6-k$ hommes parmi les 5 disponibles (il y a $\binom{5}{6-k}$ choix). Ainsi $\text{card}([X = k]) = \binom{4}{k}\binom{5}{6-k}$. La loi de $X$ est donc donnée par :
$$\forall k \in [\![1, 4]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{card}([X = k])}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{4}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{9}{6}}.$$

**Corrigé de l'exercice 2.** [Énoncé]

Remarquons que $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $B_k$ l'événement "on tire une boule blanche au $k$-ème tirage. Alors :
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ [X = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap \overline{B_k}.$$
En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve :
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-2)-2}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

**Corrigé de l'exercice 3.** [Énoncé]

La variable aléatoire $X$ est finie donc $Y$ admet une espérance d'après le théorème du transfert et on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \text{ où } q = 1-p \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k q^{n-k} \\
&\underset{i=k+1}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}p^{i-1}q^{n+1-i} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left((p+q)^{n+1} - q^{n+1}\right) \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{p(n+1)}.
\end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 4.** [Énoncé]

1. Il vient immédiatement que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $C_k$ l'événement "l'archer atteint sa cible $k$-ème tir". Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a, par indépendance les lancers :
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{k-1}} \cap C_k\right) = pq^{k-1}.$$
Remarquons aussi que :
$$[X = n] = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{C_i}\right) \cap C_n\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{C_i}\right) = \bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{C_i}.$$
On en déduit que $\mathbb{P}(X = n) = q^{n-1}$. La variable $X$ étant finie, elle admet une espérance.
$$\mathbb{E}(X) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} kpq^{k-1}\right) + nq^{n-1} = pf'(q) + nq^{n-1} \text{ où } f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$
La fonction $f$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in ]-1, 1[$, on a :
$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x} \text{ et } f'(x) = \frac{-nx^{n-1}(1-x) + 1 - x^n}{(1-x)^2}$$

Après calculs, on trouve : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-q^n}{p}$.

2. Notons $C$ l'événement "l'archer a atteint sa cible". La probabilité recherchée est :

$$\mathbb{P}_C(X=k) = \frac{\mathbb{P}(C\cap[X=k])}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{C_i}\right)\cap C_k\right)}{1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{C_i}\right)} = \frac{pq^{k-1}}{1-q^n}.$$

3. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on note $Y_k$ le gain du joueur au $k$-ème tir. Il vient immédiatement que $Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Remarquons de plus que $Y_k(\Omega) = \{0, n-k+1\}$ et $[Y_k = n-k+1] = C_k$. La variable $Y_k$ étant finie, elle admet une espérance égale à :

$$\mathbb{E}(Y_k) = (n-k+1)\mathbb{P}(C_k) = p(n-k+1).$$

Par linéarité de l'espérance, $Y$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_n) = p\frac{n(n+1)}{2}.$$

**Corrigé de l'exercice 5.** [Énoncé]

1. Il vient immédiatement que $X_N(\Omega) = [\![2, N+1]\!]$.

2. On commence par réaliser deux lancers de boule puis on continue à jouer tant que le nouveau résultat est strictement inférieur au précédent.

```python
import random as rd

def simule_X(N):
    r1 = rd.randint(1,N)
    r2 = rd.randint(1,N)
    x = 2 # on a réalisé deux lancers
    while r1 > r2:
        r1 = r2
        r2 = rd.randint(1,N)
        x += 1
    return x
```

3. Si $k \geqslant N+1, \mathbb{P}(X_N > k) = 0$ d'après la question 1. Par le même raisonnement, $\mathbb{P}(X_N>0) = \mathbb{P}(X_N>1) = 0$.

Soit $k\in[\![2,N]\!]$. L'événement $[X_N > k]$ est l'événement "les $k$ premiers résultats forment une suite strictement décroissante". Réaliser cet événement revient à choisir $k$ termes distincts dans l'ensemble $[\![1,N]\!]$. Par équiprobabilité des tirages, on trouve : $\mathbb{P}(X_N > k) = \dfrac{\binom{N}{k}}{N^k}$.

4. La variable aléatoire $X_N$ est finie, elle admet donc une espérance.

Remarquons que : $\forall k\in[\![2,N+1]\!]$, $\mathbb{P}(X_N=k) = \mathbb{P}(X_N>k-1) - \mathbb{P}(X_N>k)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_N) &= \sum_{k=2}^{N+1} k\mathbb{P}(X_N=k)\\
&= \sum_{k=2}^{N+1} k\mathbb{P}(X_N>k-1) - \sum_{k=2}^{N+1} k\mathbb{P}(X_N>k)\\
&= \sum_{j=1}^{N}(j+1)\mathbb{P}(X_N>j) - \sum_{j=2}^{N+1} j\mathbb{P}(X_N>j)\\
&= 2\mathbb{P}(X_N>1) + \sum_{j=2}^{N}\mathbb{P}(X_N>j) - (N+1)\mathbb{P}(X_N>N+1)\\
&= 2 + \sum_{j=2}^{N}\binom{N}{j}\left(\frac{1}{N}\right)^j\\
&= 2 + \left(1+\frac{1}{N}\right)^N - 1 - N\left(\frac{1}{N}\right)^1\\
&= \left(1+\frac{1}{N}\right)^N.
\end{aligned}$$

5. Remarquons que $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = \exp\left(N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)\right)$. Puisque $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N} = 0$, on trouve que $\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{N}$ et ainsi $N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} 1$. On en déduit que $\lim_{N\to+\infty} N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) = 1$ et ainsi que $\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}(X_N) = e$.

**Corrigé de l'exercice 6.** [Énoncé]

Soit $a \in I$. Puisque $f$ est croissante sur $I$, si l'événement $[X \geqslant a]$ est réalisé alors l'événement $[f(X) \geqslant f(a)]$ l'est aussi. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}([f(X) \geqslant f(a)]).$$

Puisque $X$ est finie, la variable $f(X)$ est finie aussi et donc admet une espérance. Puisque $f(a) > 0$, on peut donc appliquer l'inégalité de Markov à $f(X)$ :

$$\mathbb{P}(f(X) \geqslant f(a)) \leqslant \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(a)}.$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(a)}.$$

**Corrigé de l'exercice 7.** [Énoncé]

On note $X$ le nombre d'apparitions du numéro 1. La variable aléatoire $X$ correspond au nombre de succès ("obtenir un 1") lors de la répétition de 3600 expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$ ; elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3600$ et $p = \frac{1}{6}$.

Puisque $X$ admet une variance, on peut appliquer la formule de Bienaymé-Tchebytchev :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

En choisissant $\varepsilon = 121$, on trouve :

$$\mathbb{P}\left(|X - 600| \geqslant 121\right) \leqslant \frac{500}{121^2}.$$

Par passage au complémentaire, on trouve :

$$\mathbb{P}\left(|X - 600| < 121\right) \leqslant 1 - \frac{500}{121^2}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(|X - 600| \leqslant 120\right) \geqslant 1 - \frac{500}{121^2}.$$

i.e.

$$\mathbb{P}\left(480 \leqslant X \leqslant 720\right) \geqslant 1 - \frac{500}{121^2} \approx 0,966$$

Seconde rédaction (plus rapide) pour ceux qui ont plus d'intuition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(480 \leqslant X \leqslant 720\right) &= \mathbb{P}\left(|X - 600| \leqslant 120\right)\\ &= \mathbb{P}\left(|X - 600| < 121\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 121\right).\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev ($X$ admet un moment d'ordre 2), on trouve :

$$\mathbb{P}\left(480 \leqslant X \leqslant 720\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{121^2} \geqslant 1 - \frac{500}{121^2} \approx 0,966$$

**Corrigé de l'exercice 8.** [Énoncé]

1. La variable aléatoire $X_n$ est le nombre de succès lors de la répétition de $n$ expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre de succès ("on sonde une personne végétarienne") $p$ ; elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Remarquons que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|X_n - np| \geqslant \varepsilon n\right).$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev à $X_n$ (on pouvait l'appliquer aussi à la variable $\frac{X_n}{n}$), on trouve :

$$\mathbb{P}\left(|X_n - np| \geqslant \varepsilon n\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

L'étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$ montre qu'elle atteint un maximum en $\frac{1}{2}$, égal à $\frac{1}{4}$. On en déduit le résultat :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. On cherche une condition sur $n$ telle que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leqslant 10^{-2}\right) \geqslant \frac{95}{100}$, i.e. :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > 10^{-2}\right) \leqslant \frac{5}{100}.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > 10^{-2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant \frac{1}{4 \times 10^{-4} n}.$$

Or :

$$\frac{1}{4 \times 10^{-4} n} \leqslant \frac{5}{100} \Leftrightarrow n \geqslant 50000.$$

Il suffit donc de sonder 50000 personnes pour être sûr à plus de 95% que la fréquence $\frac{X_n}{n}$ est une approximation de la proportion inconnue de végétariens en France à $10^{-2}$ près.

**Corrigé de l'exercice 9.** [Énoncé]

Il vient immédiatement que $Y(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [\![0, n]\!] = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule des probabilités totales avec $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ pour système complet d'événements, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)}\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k)\\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}.\end{aligned}$$

On en déduit que $Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

**Corrigé de l'exercice 10.** [Énoncé]

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} \left|\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X = n)\right|. = \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{(n+1)!}e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{\lambda^n}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right).$$

On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Le théorème du transfert assure donc que la variable $\frac{1}{1+X}$ admet une espérance, égale (par positivité de $\frac{1}{1+X}$) à :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

**Corrigé de l'exercice 11.** [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement "on tire une boule blanche au $n$-ème tirage". D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}\left(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

2. L'événement $B$ : "on ne tire jamais une boule noire" est le complémentaire de :

$$\overline{B} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} [Y = k].$$

Par $\sigma$-additivité, on a :

$$\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnait une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 1$, i.e. $\mathbb{P}(B) = 0$.

La probabilité de ne jamais tirer de boule noire est donc nulle.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |k\mathbb{P}(Y = k)| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1) - k}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{k}{(k+1)!}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k)\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e - 1.\end{aligned}$$

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(Y = k)$ est absolument convergente donc la variable $Y$ admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(Y) = e - 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left|k^2\mathbb{P}(Y = k)\right| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+1) - k^2}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)!}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2e - (e - 1) = e + 1.\end{aligned}$$

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2\mathbb{P}(Y=k)$ est absolument convergente donc la variable $Y$ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - E(Y)^2 = 3e - e^2.$$

**Corrigé de l'exercice 12.** [Énoncé]

1. L'événement $A$ correspondant à "$X$ prend une valeur paire" est

$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} [X = 2p].$$

Par $\sigma$-additivité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2p) = e^{-\lambda}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Or, par linéarité de la somme de séries convergentes, on a :

$$e^{\lambda} + e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n+(-\lambda)^n}{n!} = 2\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

On en déduit que que la probabilité que $X$ prenne une valeur paire est $\mathbb{P}(A) = e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$.

2. Remarquons que $Y(\Omega) = \{-1;1\}$.

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(A) = e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda) \text{ et } \mathbb{P}(Y=-1) = 1-\mathbb{P}(A) = 1-e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda).$$

La variable $Y$ étant finie, elle admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=-1) = 2\mathbb{P}(A) - 1 = e^{-2\lambda}.$$

**Corrigé de l'exercice 13.** [Énoncé]

1. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$.

La variable $X_{k+1} - X_k$ aléatoire correspond au nombre de tirages nécessaires pour que le collectionne passe de $k$ à $k+1$ images distinctes. Il s'agit du rang du premier succès lors de la répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès ("obtenir une image non déjà obtenue") est égale à $\dfrac{N-k}{N}$. La variable $X_{k+1}-X_k$ suit donc la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-k}{N}$.

2. Remarquons que $X_1$ est constante égale à 1 et :

$$X_N = X_1 + \sum_{k=1}^{N-1}(X_{k+1}-X_k) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1}(X_{k+1}-X_k).$$

Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, la variable $X_{k+1}-X_k$ admet une espérance donc la variable $X_N$ admet une espérance par linéarité et :

$$\mathbb{E}(X_N) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1}\mathbb{E}(X_{k+1}-X_k) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{N}{N-k} = 1 + N\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}$$

*La comparaison série/intégrale (série harmonique) assure que* $\mathbb{E}(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\ln N$. *Ainsi, lorsque $N$ est grand, le nombre moyen d'achats nécessaires pour obtenir une collection complète de $N$ images est environ égal à $N\ln N$.*

**Corrigé de l'exercice 14.** [Énoncé]

1.

```
import random as rd

def simuleT(N,k):
    t = 0
    num, compteur_num = 0, 0
    while compteur_num < k:
        tirage = rd.randint(1,N)
        t += 1
        if tirage == num:
            compteur_num += 1
        else:
            num = tirage
            compteur_num = 1
    return t
```

2. Remarquons que :

$$[T=k] = \bigcap_{i=2}^{k} A_i \text{ et } [T=k+1] = \overline{A_2}\cap\left(\bigcap_{i=3}^{k+1} A_i\right).$$

Puisque les tirages s'effectuent avec remise, les événements de la famille $(A_i)_{i\geqslant 2}$ sont indépendants. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(T=k) = \frac{1}{N^{k-1}} \text{ et } \mathbb{P}(T=k+1) = \frac{N-1}{N^k}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que :
$$[T = n+k] = [T > n] \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2} \cap \cdots \cap A_{n+k}.$$
En effet, si $[T = n+k]$ est réalisé, on a nécessairement le nombre de tirages $T$ est strictement supérieur à $n$ (car $k > 0$), les $k$ derniers tirages ont fourni le même numéro et le $n+1$-ème numéro est différent du précédent (car sinon $T < n+k$).

Réciproquement, si l'événement $[T > n] \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2} \cap \cdots \cap A_{n+k}$ est réalisé, alors $[T = n+k]$ est réalisé, prouvant ainsi l'égalité ci-dessus.

Par indépendance des tirages, on trouve que :
$$\mathbb{P}(T = n+k) = \frac{N-1}{N^k}\mathbb{P}(T > n).$$

4. Soit $A \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{A} \mathbb{P}(T > n) &= \mathbb{P}(T > 0) + \sum_{n=1}^{A} \mathbb{P}(T > n)\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{A} \frac{N^k}{N-1}\mathbb{P}(T = n+k)\\ &= 1 + \frac{N^k}{N-1}\sum_{n=k+1}^{A} \mathbb{P}(T = n)\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + \frac{N^k}{N-1}\left(1 - \mathbb{P}(T = k)\right).\end{aligned}$$
On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge. La variable aléatoire $T$ étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, le résultat admis assure que la variable $T$ admet une espérance, égale à :
$$\mathbb{E}(T) = 1 + \frac{N^k}{N-1}\left(1 - \mathbb{P}(T = k)\right) = \frac{N^k - 1}{N-1}.$$

**Corrigé de l'exercice 15.** [Énoncé]

1. a. La variable $T_1$ correspond au rang du premier succès ("obtenir deux boules de même numéro) lors de la répétition d'expériences indépendantes de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p_1 = \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{1}{2n-1}$.

La variable $T_1$ suit donc la loi géométrique de paramètre $p_1 = \frac{1}{2n-1}$.

Il vient immédiatement que $T_1$ admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{p_1} = 2n-1$.

b. On pourrait simuler la réalisation de $T_1$ à l'aide de sa loi (le code est du cours). On peut aussi modéliser l'urne par une liste de nombres, comme codé ci-dessous. On rappelle qu'on peut considérer un tirage simultané de deux boules à un tirage successif et sans remise de deux boules.

```python
import random as rd

def simuleT1(n):
    urne = [k for k in range(1,n+1)] * 2
    b1, b2 = 0, 1
    t = 0
    while b1 != b2:
        # tirage de la première boule
        i1 = rd.randint(0,2*n-1)
        b1 = urne.pop(i1)
        # tirage de la seconde
        i2 = rd.randint(0,2*n-2)
        b2 = urne[i2]
        # on remet la première boule tirée
        urne.append(b1)
        t += 1
    return t
```

2. a. La variable $X_i$ correspond au nombre de tirages nécessaires pour tirer deux boules de même numéro, après avoir tiré le $(i-1)$-ème couple de boules de même numéro.

b. Puisque $X_i$ est le rang du premier succès ("obtenir deux boules de même numéro) lors de la répétition d'expériences indépendantes de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p_i = \frac{n-i+1}{\binom{2n-2i+2}{2}} = \frac{1}{2n-2i+1}$.

La variable $X_i$ suit donc la loi géométrique de paramètre $p_i = \frac{1}{2n-2i+1}$.

Il vient immédiatement que $X_i$ admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{p_i} = 2n-2i+1$.

c. En remarquant que :
$$T_n = X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$
on trouve que $T_n$ admet une espérance par linéarité de l'espérance, égale à :
$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1) = 2n^2 - n(n+1) + n = n^2.$$

3. a. Puisque $[S_n = 0] = [T_1 > n]$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(T_1 > n) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n.$$

b. On repasse par la forme exponentielle (réflexe !) :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right).$$

Puisque $n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-\frac{1}{2}}$.

c. Remarquons que :

$$[S_n = n] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i = 1],$$

Par indépendance des variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a :

$$P(S_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2n-2i+1} = \frac{1}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n} 2i = \frac{n!2^n}{(2n)!}.$$

**Corrigé de l'exercice 16.** [Énoncé]

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $F_k$ (resp. $P_k$) l'événement “on obtient face (resp. pile) au $k$-ème lancer.

Le jeu ne s'arrête pas si, et seulement si, l'événement

$$\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right)$$

est réalisé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} F_k.$$

On en déduit par indépendance des lancers que :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = 0$ par encadrement de limites.

On montre de la même manière que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) = 0$.

La probabilité que le jeu ne s'arrête pas est donc nulle, i.e. le jeu s'arrête presque sûrement.

2. a. Il vient immédiatement que $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

$$\forall n \geqslant 2,\ [X = n] = (F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n) \cup (P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n).$$

On trouve alors que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 2$.

b. On remarque que la variable aléatoire $X - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
On en déduit que $X - 1$ admet une espérance, égale à 2.
La variable aléatoire $X$ admet donc une espérance et $\mathbb{E}(X) = 3$.

**Corrigé de l'exercice 17.** [Énoncé]

Supposons que $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la condition d'absence de mémoire. On en déduit que :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X > n + k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(X > n).$$

En particulier, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > n + 1) = \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(X > n).$$

Notons $q = \mathbb{P}(X > 1)$. La suite $(\mathbb{P}(X > n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique de raison $q$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X > n) = q^n \mathbb{P}(X > 0) = q^n.$$

En notant $p = 1 - q$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} - q^n = pq^{n-1}.$$

La variable aléatoire $X$ suit donc la loi géométrique de paramètre $p$.

**Corrigé de l'exercice 18.** [Énoncé]

1. Par indépendance des lancers, $a_1 = 0$, $a_2 = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \frac{4}{9}$, $a_3 = \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = \frac{4}{27}$ et $a_4 = \mathbb{P}(F_2 \cap P_3 \cap P_4) = \frac{4}{27}$.

   Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. Puisque $(F_1, P_1)$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :
   $$a_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(X = n) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(X = n).$$
   On remarque qu'obtenir deux piles consécutifs au bout de $n$ lancers sachant qu'on obtient face au premier lancer revient à obtenir deux piles consécutifs au bout de $n-1$ lancers. On en déduit que $\mathbb{P}_{F_1}(X = n) = \mathbb{P}(X = n-1) = a_{n-1}$.

   Puisque $n \geqslant 3$, si on obtient pile au premier lancer, on obtient nécessairement face au second pour réaliser l'événement $[X = n]$. Ainsi :
   $$\mathbb{P}_{P_1}(X = n) = \mathbb{P}_{P_1}(F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(X = n) = \mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(X = n).$$
   On trouve alors par le même raisonnement que précédemment que $\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(X = n) = a_{n-2}$.

   On obtient alors le résultat attendu :
   $$\forall n \geqslant 3,\ a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}.$$

2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant linéaire récurrente d'ordre 2, on trouve après calculs que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n &= \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ &= \frac{-4}{9}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-4}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.\end{aligned}$$
   On en déduit que la série de terme général $a_n$ converge et a pour somme 1. Cela signifie qu'on obtient deux piles consécutifs presque sûrement.

4. Une étude de séries géométriques dérivées usuelle montre que la variable $X$ admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X) = \frac{15}{4}$.

**Corrigé de l'exercice 19.** [Énoncé]

On commence par établir la relation suivante :
$$\begin{aligned}\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{N} n\left(\mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X > n-1) - \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}(n+1)\mathbb{P}(X > n) - \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X > n) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{P}(X > n)\right) - N\mathbb{P}(X > n). \qquad (1)\end{aligned}$$

1. Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X > n)$ converge.

   On déduit de la relation (1) que :
   $$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) \leqslant \sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n).$$
   Puisque la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n)$ (à termes positifs) est majorée, la série converge, i.e. $X$ admet une espérance. De plus, on a :
   $$0 \leqslant N\mathbb{P}(X > N) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} N\mathbb{P}(X = n) \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)$$
   Puisque le reste d'une série convergente converge vers 0, $\lim_{N\to+\infty} N\mathbb{P}(X > N) = 0$ (par encadrement de limites) et ainsi, par passage à la limite dans la relation (1):
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n).$$

2. Supposons réciproquement que $X$ admet une espérance. La démonstration ci-dessus permet encore d'établir que $\lim_{N\to+\infty} N\mathbb{P}(X > N) = 0$. Par passage à la limite dans la relation

(1), la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

3. Pour toute variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge si, et seulement si, $X$ admet une espérance, et dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

**Corrigé de l'exercice 20.** [Énoncé]

1. Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit $t \in [-1, 1]$. Puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |t^n \mathbb{P}(X = n)| \leqslant \mathbb{P}(X = n).$$

   Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument par comparaison de séries à termes positifs. Le théorème du transfert assure donc que $t^X$ admet donc une espérance.

   Toute fonction génératrice est donc bien définie sur $[-1, 1]$.

2. On note $q = 1 - p$. On trouve après calculs :

   a. $G_X : t \mapsto tp + q$
   b. $G_X : t \mapsto (tp + q)^n$
   c. $G_X : t \mapsto \dfrac{pt}{1 - qt}$
   d. $G_X : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$