1 Applications Linéaires

1.1 Définitions et exemples

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si :

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ \forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y). \end{cases}$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 2

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \to F$ est linéaire si, et seulement si, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Exemple 3 (Exemples fondamentaux !)

(i) L'application ci-dessous, appelée l'**application nulle** de E dans F, est une application linéaire.

$$\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array}$$

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. L'application $h_\lambda = \lambda \operatorname{Id}_E$, appelée **homothétie vectorielle** de rapport λ sur E, est une application linéaire.

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

En particulier, **l'application identité** Id_E est une application linéaire de E dans lui-même.

(iii) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$. L'application ci-dessous est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) & \mapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p \end{array}$$

(iv) Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in (\mathbb{K}^p)^n$. L'application ci-dessous est linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} \end{array}$$

Proposition 4 (*admise*)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a alors :

(i) $f(0_E) = 0_F$,

(ii) $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$,

(iii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

Définition 5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

(i) On dit que f est un **endomorphisme** si $\forall x \in E,\ f(x) \in E$ (ou encore $f(E) \subset E$).
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

(ii) On dit que f est un **isomorphisme** (d'espaces vectoriels) si f est une application linéaire bijective.

(iii) On dit que f est un **automorphisme** de E si f est un endomorphisme et un isomorphisme.
L'ensemble des automorphismes de E, noté $\mathrm{GL}(E)$, est appelé **groupe linéaire** de E.

Exemple 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application f qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe P' est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 7

L'application identité Id_E est un automorphisme qui est sa propre réciproque.

Définition 8

On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 9 (*admise*)

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F.
Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est une application linéaire de E dans F.

Proposition 10 (*Composée d'applications linéaires (admise)*)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G, i.e. $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Proposition 11 (*Réciproque d'un isomorphisme (admise)*)

Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Proposition 12 (*admise*)

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires.
Si f et g sont deux isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \in \mathcal{L}(G, E).$$

Notation 13

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f = f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ facteurs}).$$

1.3 Applications linéaires injectives/surjectives

Définition 14

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle :

(i) **noyau** de f, noté $\operatorname{Ker} f$, le sous-ensemble de E défini par :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

(ii) **image** de f, notée $\operatorname{Im} f$, le sous-ensemble de F défini par :

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\}.$$

Proposition 15

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

(i) $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E,

(ii) $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

Remarque 16 (Application)

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n équations et p inconnues peut s'écrire comme le noyau d'une application linéaire de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} \end{array}$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Théorème 17 (*Lien entre noyau et injectivité, image et surjectivité*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors :

(i) f est injective si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

(ii) f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration.

Exemple 18

Étudier la linéarité, l'injectivité et la surjectivité de l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+4z, 3x-z) \end{array}.$$

2 Applications Linéaires en dimension finie

2.1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Le résultat suivant permet d'affirmer qu'en dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Théorème 19 (***Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base (admise)***)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}$ et F un espace vectoriel (de dimension quelconque).
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $y_1, \ldots, y_p$ des vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que : $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) = y_k$.

Exemple 20

Déterminer toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$ telles que :

$$f(1) = 0,\ f(X) = X,\ f(X^2) = 2X^2 \ \text{ et } \ f(X^3) = 3X^3.$$

Corollaire 21 (***Propriété fondamentale de représentation matricielle (admise)***)

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Toute application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} \end{array}.$$

où les scalaires $a_{i,j}$ sont définis par :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

2.2 Rang d'une application linéaire et théorème du rang

Proposition 22 (***Détermination de l'image d'une application linéaire***)

Soient $f : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

(i) $\mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right) = f\left(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)\right)$ (qu'on retiendra sous la forme : $\mathrm{Vect}\left(f\left(\mathcal{F}\right)\right) = f\left(\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)\right)$).

(ii) En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(f\left(\mathcal{B}\right)\right)$.

Démonstration.

Remarque 23 (À retenir)

Ce résultat permet de déterminer facilement une base de $\operatorname{Im} f$: l'image d'une base de E en est une famille génératrice. Il suffit d'étudier sa liberté pour en déterminer une base.

Remarque 24

Déterminer l'image de l'application linéaire définie à l'exemple 18.

Définition 25

Soient E un espace vectoriel E de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
On appelle **rang** d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, noté $\operatorname{rg} f$, la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{rg} f = \dim\left(\operatorname{Im} f\right).$$

Théorème 26 (*Théorème du rang (admis)*)

Soient E un espace vectoriel **de dimension finie**, F un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim\left(\operatorname{Ker} f\right) + \operatorname{rg} f = \dim E.$$

Théorème 27 (*Caractérisation d'une injection/surjection/bijection en dimension finie*)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, respectivement égales à p et n.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

(i) f est injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = p \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est libre.

(ii) f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = n \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est génératrice de F.

(iii) f est bijective $\Leftrightarrow \operatorname{rg} f = n = p \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une base de F.

Démonstration.

Corollaire 28

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Démonstration.

Corollaire 29

Tout espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

Exemple 30

L'application f qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe le vecteur $(P(0), P(1), P(2))$ de $\mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.

3 Matrices et applications linéaires

3.1 Représentation matricielle d'une famille de vecteurs en dimension finie

Définition 31

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On appelle **matrice de la famille** $(v_1, \dots, v_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ où, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur v_j dans la base $\mathcal{B}$, i.e. :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Exemple 32

1. Soient $v_1 = (5, 7) \in \mathbb{R}^2$ et $v_2 = (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$. Déterminons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2)$ dans le cas où $\mathcal{B}$ est :

   a. la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ b. (f_1, f_2) où $\begin{cases} f_1 = (0, 1) \\ f_2 = (1, 0) \end{cases}$ c. (g_1, g_2) où $\begin{cases} g_1 = (3, 1) \\ g_2 = (1, -1) \end{cases}$.

2. Soient $P_1 = 1,\ P_2 = (2X - 3)^2$ et $P_3 = X^3 - 7$.

   Déterminons la matrice de (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3.2 Représentation matricielle d'une application linéaire en dimension finie

Définition 33 (*Matrice d'une application linéaire*)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à p et n. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, il existe $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

($(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$).
On appelle **matrice de l'application linéaire** u de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ ou encore $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}(u)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ i.e. la matrice de la famille de vecteurs $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u(e_1), \ldots, u(e_p)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(u\left(\mathcal{B}\right)\right).}$$

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.

Remarque 34

D'après cette définition, la donnée d'une matrice A et le choix deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de deux espaces vectoriels E et F suffit à définir une unique application linéaire de E vers F dont la matrice de $\mathcal{B}_E$ vers $\mathcal{B}_F$ est la matrice A.

Exemple 35

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P(X+1) - P(X)$.
On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}_2$ la famille $\mathcal{B}_2 = \left(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3\right)$. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique puis la matrice de f de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$.

3.3 Applications

Proposition 36 (***Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires (admis)***)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\lambda f + g) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(g).$$

Proposition 37 (***Matrice d'une composée d'applications linéaires***)

Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ des bases respectives de trois espaces vectoriels E, F et G de dimension finie.
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et soient $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3\leftarrow\mathcal{B}_1}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3\leftarrow\mathcal{B}_2}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}(u).$$

Démonstration.

Définition 38

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle :

(i) **noyau** de A, noté $\mathrm{Ker}\,A$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Ker}\,A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\}.$$

(ii) **image** de A, notée $\mathrm{Im}\,A$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}\,A = \{AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}.$$

Proposition 39 (***Caractérisation matricielle d'une égalité vectorielle***)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_n)$ une base de F, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.
Pour $x \in E$ et $y \in F$, on note X (resp. Y) la matrice-colonne des coordonnées de x (resp. y) dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).
Alors :

(i) $y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$ (ii) $x \in \mathrm{Ker}\,u \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}\,A$ (iii) $y \in \mathrm{Im}\,u \Leftrightarrow Y \in \mathrm{Im}\,A$.

Démonstration.

Exemple 40

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont matrice dans la base canonique (de $\mathbb{R}^3$) est $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'image du vecteur $a = (1, 2, 3)$ par l'application u.

2. Déterminer le noyau de u.

3. Déterminer la matrice de u^2 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans elle-même puis l'expression analytique de u^2.

Théorème 41 (*Caractérisation matricielle d'un isomorphisme*)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases respectives des deux E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
L'application linéaire u est un isomorphisme si, et seulement si, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible.
Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\right)^{-1}.$$

Démonstration.

Exemple 42

On considère l'application φ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe $\varphi(P) = P - P'$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
4. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ puis identifier l'isomorphisme réciproque.

Exemple 43

On considère l'endomorphisme :
$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}.$$

1. Montrer que ψ est un isomorphisme et déterminer l'isomorphisme réciproque.

2. Déterminer la matrice A de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

4 Rang

Définition 44 (*Rang d'une matrice*)

On appelle **rang** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $\operatorname{rg} A$, le rang de la famille de vecteurs formée par les vecteurs colonnes de A.

Remarque 45

Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} A \leqslant \min(n,p)$.
En effet : le rang de A est le rang d'une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n.

Proposition 46 (*Opérations élémentaires sur les colonnes (admise)*)

Le rang d'une matrice reste inchangé si l'on effectue l'une des opérations élémentaires suivantes :
- permutation de deux colonnes de A,
- multiplication de l'une des colonnes de A par un scalaire **non nul**,
- ajout à l'une des colonnes de A un combinaison linéaire des autres colonnes.

Théorème 47 (*Invariance du rang par transposition (admis)*)

Une matrice et sa transposée ont même rang :
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg} A.$$

Remarque 48

En conséquence, le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille formée par ses vecteurs lignes.
La méthode du pivot de Gauss est donc plus que conseillée dans le calcul du rang d'une matrice.

Exemple 49

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -10 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 50 (*Lien entre rang d'une matrice et d'une famille de vecteurs (admis)*)

Soient $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est égal au rang de la matrice de ces vecteurs écrits dans la base $\mathcal{B}$, i.e. :

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)\right).$$

Proposition 51 (*Lien entre rang d'une matrice et d'une application linéaire*)

Soient E et F deux espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\right).$$

Démonstration.

Remarque 52 (À retenir)

Le rang d'une application linéaire est le rang d'une de ses matrices dans des bases quelconques.

Théorème 53 (***Théorème du rang pour les matrices***)

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = p.$$

Démonstration.

Corollaire 54

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est une matrice inversible si, et seulement si, $\operatorname{rg} A = n$.

Démonstration.