Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Calculer le rang des matrices ci-dessous. Dans le cas où elles sont inversibles, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. ♡ [Corrigé] ★☆☆

On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x, x+y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, 2x-y+3z) \end{array}$$

1. a. Montrer que f est une application linéaire.
   b. Déterminer son noyau, son image et son rang.
   c. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Même question pour l'application g.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★★☆

Montrer à l'aide d'une application linéaire bien choisie que l'ensemble E défini ci-dessous est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★★☆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de la matrice A. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$. En déduire que A^{-1}.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I_3$.
4. Exprimer u_n et v_n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

(ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \forall z \in E, \exists (x,y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f,\ z = x + y$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★☆

Soient a un réel et n un entier naturel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = (X-a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a)).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Quelle relation existe-t-il entre A et D ? *On pourra remarquer que* $f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} \circ f \circ \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Exercice 7. [Corrigé] ★★☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\operatorname{Id}_E = 0$.

1. Calculer $(f - 2\operatorname{Id}_E) \circ (f - 3\operatorname{Id}_E)$ et $(f - 3\operatorname{Id}_E) \circ (f - 2\operatorname{Id}_E)$.
2. En déduire que :

$$\forall z \in E,\ \exists! (x,y) \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E) \times \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_E),\ z = x + y.$$

Exercice 8. [Corrigé] ★★★

Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f^2 = 0$.

1. Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. En déduire le rang de f et la dimension de son noyau.
3. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On construira la base $\mathcal{B}$ en commençant par considérer un vecteur $c \in E \setminus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 9. Oraux 2010 [Corrigé] ★★★

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles à valeurs réelles, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 où :

$$f_1 : x \mapsto e^{-x}, \quad f_2 : x \mapsto (x-1)e^{-x}, \quad f_3 : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F.
2. À toute fonction f de F, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = f'$.
   Montrer que Φ est un endomorphisme de F, puis écrire la matrice A de Φ dans $\mathcal{B}$.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*on pourra écrire* $A = -I_3 + J$).

Exercice 10. [Corrigé] ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-1}\binom{j-1}{i-1} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que l'application $f : P(X) \mapsto P(1-X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Attention, le polynôme $f(P)$ n'est pas le résultat d'un produit mais d'une composition.
2. Calculer A^2 puis A^{-1}.

Exercice 11. Oraux 2007 [Corrigé] ★★★

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la dimension des espaces $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$, $\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id})^2$.
2. Montrer que, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique couple de vecteurs $(y, z) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \times \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id})^2$ tel que $x = y + z$.

Exercice 12. Oraux 2011 [Corrigé] ★★★

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(u^2 + \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker} u$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $(y, z) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{Id})$ tel que $x = y + z$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{Id}) \neq \{0\}$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$.

Montrer que $f + \operatorname{Id}_E$ et $f - \operatorname{Id}_E$ sont des automorphismes de E et exprimer leurs réciproques respectives à l'aide de puissances de f.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. a. La matrice A est-elle inversible ?
   b. Calculer A^2 et A^3 et déterminer le rang de ces deux matrices.
2. a. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
   b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base ainsi que sa dimension.
   c. A-t-on $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$?
3. On note $u = (-2, -1, 2)$.
   a. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(v) = u$ et dont la deuxième coordonnée est 1.
   b. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(w) = v$ et dont la deuxième coordonnée est 1.
   c. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, i.e. $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\operatorname{Id})$.
   d. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   e. Déterminer la matrice N de f dans $\mathcal{B}'$. Quelle relation lie A et N ?
4. Pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note :

   $$C_B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$

   a. Montrer que, pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, C_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que $C_N = \operatorname{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   c. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a

   $$M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N.$$

   d. En déduire que $C_A = \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 15. [Corrigé] ★★★

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et D l'application qui, à toute fonction f de E associe f'. On considère les trois fonctions de E suivantes :

$$f_1 : t \mapsto e^t,\ f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\ f_3 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

On note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

1. a. Montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Que peut-on en déduire ?

   b. Montrer que pour tout $f \in G$, $D(f) \in G$.
   On dit que G est stable par D et on note d l'endomorphisme induit par D sur G, i.e. :

$$d : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ f & \mapsto & D(f) = f'. \end{array}$$

   c. Préciser la matrice M de d dans la base $\mathcal{B}$ de G.

   d. Calculer M^3. En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

   e. L'application d est-elle un automorphisme ? Si oui, expliciter d^{-1}.

2. On cherche à résoudre l'équation différentielle $y^{(3)} = y$ $(*)$.

   a. Montrer que si f est une fonction solution de $(*)$, alors f est dérivable trois fois et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   b. Soit $T = D^3 - \mathrm{Id}_E$. Montrer que T est un endomorphisme de E.

   c. Montrer que l'ensemble des solutions de $(*)$ est $\mathrm{Ker}\, T$.

   d. Montrer, sans calcul, que $G \subset \mathrm{Ker}\, T$.

   e. On veut désormais montrer l'inclusion réciproque, i.e. $\mathrm{Ker}\, T \subset G$.

      (i) Soit f une solution de $(*)$. On note $g = f + f' + f''$. Montrer que $g' = g$.

      (ii) En déduire g puis f.

   f. Conclure.