# 1 Déterminer la matrice d'une application linéaire dans deux bases

Pour déterminer la matrice d'une application linéaire $f$ d'une base $\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{B}'$, il suffit, pour chaque vecteur de la base de départ $\mathcal{B}$, de calculer son image par $f$, puis de déterminer les coordonnées de cette image dans la base $\mathcal{B}'$.

**Exercice 1**. *On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la base canonique, notée $\mathcal{B}$, et $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $(1, X-2, (X-2)^2)$.*
*Déterminer la matrice de l'application linéaire $f$ qui, à tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $f(P) = P' \in \mathbb{R}_2[X]$.*

$f(1) = 0 = 0 + 0(X-2) + 0(X-2)^2$.
$f(X) = 1 = 1 + 0(X-2) + 0(X-2)^2$.
$f(X^2) = 2X = 2(X-2) + 4 = 4 + 2(X-2) + 0(X-2)^2$.
$f(X^3) = 3X^2 = 3(X-2)^2 + 12X - 12 = 3(X-2)^2 + 12(X-2) + 12 = 12 + 12(X-2) + 3(X-2)^2$.
La matrice de $f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

# 2 Déterminer l'image d'une application linéaire

Pour déterminer l'image d'une application linéaire $f : E \to F$, il suffit de déterminer l'image d'une base $\mathcal{B}$ de $E$ : $\mathrm{Im}\, f$ est engendré par $f(\mathcal{B})$.
*Cela est particulièrement aisé si on connait la matrice $A$ de $f$ relativement à des bases $\mathcal{B}$ de $E$ et $\mathcal{B}'$ de $F$ : $\mathrm{Im}\, f$ est engendré par les vecteurs dont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont les colonnes de la matrice $A$.*

**Exercice 2**. *On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$. Déterminer une base de l'image de l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

La lecture de $A$ permet d'écrire :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\ f(e_2) = -e_1 + e_3 + e_4,\ f(e_3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 \text{ et } f(e_4) = -e_1 + e_2 + 3e_3 + 5e_4.$$

On sait que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. Étudions la liberté de la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$.
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3) + df(e_4) = 0_E$ $(*)$.

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow a(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + b(-e_1 + e_3 + e_4) + c(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4) + d(-e_1 + e_2 + 3e_3 + 5e_4) = 0_E \\
&\Leftrightarrow (a - b + c - d)e_1 + (a + 2c + d)e_2 + (a + b + 3c + 3d)e_3 + (a + 2b + 4c + 5d)e_4 = 0_E \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c - d = 0 \\ a + 2c + d = 0 \\ a + b + 3c + 3d = 0 \\ a + 2b + 4c + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c - d = 0 \\ b + c + 2d = 0 \\ 2c + 4d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3d \\ b = 0 \\ c = -2d. \end{cases}
\end{aligned}$$

(par liberté de la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4)$)

On en déduit que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est liée : $3f(e_1) - 2f(e_3) + f(e_4) = 0_E$. On peut donc écrire $f(e_4) = 2f(e_3) - 3f(e_1)$ et ainsi $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
En reprenant les calculs (avec $d = 0$), il vient que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre ; c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$.

## 3 Déterminer le noyau d'une application linéaire

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$, on peut :

- résoudre l'équation $f(x) = 0_F$ ;
- résoudre l'équation matricielle $AX = 0$ où $A$ désigne la matrice de $f$ relativement à des bases $\mathcal{B}$ de $E$ et $\mathcal{B}'$ de $F$, i.e. déterminer $\operatorname{Ker} A$.

  *Attention cependant : les matrices-colonnes solutions de l'équation $AX = 0$ sont les coordonnées de vecteur du noyau de $f$, **exprimée dans la base $\mathcal{B}$** (et non nécessairement dans la base canonique) de $E$.*

**Exercice 3**. *Déterminer le noyau de l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = P+(1-X)P'$.*

- **Méthode vectorielle.**

  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $(n \geqslant 1)$ tel que $f(P) = 0$.

  Le polynôme $P$ vérifie alors l'équation différentielle $P + (1 - X)P' = 0$ $(*)$, dont l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est :

$$\{\lambda(X-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(X-1),$$

  (on peut résoudre $(*)$ sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ puis vérifier que les fonctions solutions sur ces intervalles sont encore solutions sur $\mathbb{R}$, ou encore chercher les solutions polynômiales de $(*)$).

  On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X-1)$.

- **Méthode matricielle.**

  On a $f(1) = 1$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(X^k) = X^k + (1-X)kX^{k-1} = (1-k)X^k + kX^{k-1}$. La matrice $A$ de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2-n & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1-n \end{pmatrix}.$$

  En notant $U = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on a :

$$U \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow AU = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \\ \quad\vdots \\ (2-n)a_{n-1} + na_n = 0 \\ (1-n)a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -a_1 \\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ a_k = 0. \end{cases}$$

  On en déduit que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

  Puisque $A$ est la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(-1 + X)$.

## 4 Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme

Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est un isomorphisme, on peut choisir l'une des méthodes suivantes.

- On peut montrer que $f$ est injective (en déterminant son noyau) et surjective (en déterminant son image ou en calculant son rang).
- Si on sait déjà que $E$ et $F$ sont de dimension finie et $\dim E = \dim F$, il suffit de montrer que $f$ est injective ou surjective.
- On peut déterminer la matrice (carrée !) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de $f$ relativement à des bases $\mathcal{B}$ de $E$ et $\mathcal{B}'$ de $F$ puis vérifier que $A$ est inversible :
  - en montrant que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (résolution de l'équation $AX = 0$) ;
  - en montrant que $\operatorname{rg} A = n$ ;
  - en déterminant une expression explicite de l'inverse de $A$.
    *Cette dernière méthode nous donne de plus la matrice de $f^{-1}$ relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.*

**Exercice 4**. *Soit $H = \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où $\operatorname{ch} : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que l'application linéaire $\Psi : H \to \mathbb{R}^2$ qui, à tout $f \in H$ associe $\Psi(f) = (f(-\ln 2), f(\ln 2)) \in \mathbb{R}^2$, est un isomorphisme.*

Montrons que $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de $H$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \operatorname{ch} + b \operatorname{sh} = 0$. En évaluant en 0 puis en 1, on trouve que $a = 0$ et $b\dfrac{e - e^{-1}}{2} = 0$, i.e. $a = b = 0$. La famille $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une libre, c'est donc une base de $H$.

Puisque $\Psi(\operatorname{ch}) = \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$ et $\Psi(\operatorname{sh}) = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, la matrice $A$ de $\Psi$ relativement à la base $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ de $H$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 5/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

$\det A = \dfrac{5}{8} \neq 0$, la matrice $A$ est donc inversible $\left(\text{et } A^{-1} = \dfrac{8}{5}\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 5/4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\right)$.

On en déduit donc que $\Psi$ est un isomorphisme entre $H$ et $\mathbb{R}^2$.

## 5 Calculer le rang d'une application linéaire

Pour calculer le rang d'une application linéaire $f : E \to F$, on peut :

- déterminer $\operatorname{Im} f$ puis calculer sa dimension ;
- déterminer $\dim \operatorname{Ker} f$ puis appliquer le théorème du rang ;
- calculer le rang de n'importe quelle matrice de $A$ relativement à des bases de $E$ et $F$.

**Exercice 5**. *Déterminer le rang de l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $f(P) = P + (1 - X)P'$.*

En reprenant le résultat de l'exemple 3, on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X - 1)$.

Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie (égale à $n + 1$), on peut appliquer le théorème du rang à $f$ :

$$\operatorname{rg} f = n + 1 - \dim \operatorname{Ker} f.$$

Puisque $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 ($X - 1$ n'est pas le polynôme nul), $\operatorname{rg} f = n$.