Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Calculer le rang des matrices ci-dessous. Dans le cas où elles sont inversibles, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. ♡ [Corrigé] ★☆☆

On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x, x+y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, 2x-y+3z) \end{array}$$

1. a. Montrer que f est une application linéaire.
   b. Déterminer son noyau, son image et son rang.
   c. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Même question pour l'application g.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★★☆

Montrer à l'aide d'une application linéaire bien choisie que l'ensemble E défini ci-dessous est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★★☆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de la matrice A. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$. En déduire que A^{-1}.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I_3$.
4. Exprimer u_n et v_n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

(ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \forall z \in E, \exists (x,y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f,\ z = x + y$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★☆

Soient a un réel et n un entier naturel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = (X-a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a)).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Quelle relation existe-t-il entre A et D ? *On pourra remarquer que* $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Exercice 7. [Corrigé] ★★☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Calculer $(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - 3\,\mathrm{Id}_E)$ et $(f - 3\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E)$.
2. En déduire que :

$$\forall z \in E,\ \exists! (x,y) \in \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \times \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_E),\ z = x + y.$$

Exercice 8. [Corrigé] ★★★

Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f^2 = 0$.

1. Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. En déduire le rang de f et la dimension de son noyau.
3. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On construira la base $\mathcal{B}$ en commençant par considérer un vecteur $c \in E \setminus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 9. Oraux 2010 [Corrigé] ★★★

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions réelles à valeurs réelles, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 où :

$$f_1 : x \mapsto e^{-x}, \quad f_2 : x \mapsto (x-1)e^{-x}, \quad f_3 : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3)$ est une base de F.
2. À toute fonction f de F, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f)=f'$.
   Montrer que Φ est un endomorphisme de F, puis écrire la matrice A de Φ dans $\mathcal{B}$.
3. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$ (*on pourra écrire* $A=-I_3+J$).

Exercice 10. [Corrigé] ★★★

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j}=\begin{cases}(-1)^{i-1}\binom{j-1}{i-1} & \text{si } 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Montrer que l'application $f : P(X)\mapsto P(1-X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Attention, le polynôme $f(P)$ n'est pas le résultat d'un produit mais d'une composition.
2. Calculer A^2 puis A^{-1}.

Exercice 11. Oraux 2007 [Corrigé] ★★★

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la dimension des espaces $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$, $\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{Id})^2$.
2. Montrer que, pour tout vecteur $x\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple de vecteurs $(y,z)\in\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})\times\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{Id})^2$ tel que $x=y+z$.

Exercice 12. Oraux 2011 [Corrigé] ★★★

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3=-u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(u^2+\mathrm{Id})\subset\operatorname{Ker}u$.
2. En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $(y,z)\in\operatorname{Ker}u\times\operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$ tel que $x=y+z$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})\neq\{0\}$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3=0$.

Montrer que $f+\mathrm{Id}_E$ et $f-\mathrm{Id}_E$ sont des automorphismes de E et exprimer leurs réciproques respectives à l'aide de puissances de f.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A=\begin{pmatrix}2&10&7\\1&4&3\\-2&-8&-6\end{pmatrix}$$

1. a. La matrice A est-elle inversible ?
   b. Calculer A^2 et A^3 et déterminer le rang de ces deux matrices.
2. a. Montrer que $\operatorname{Ker}f\subset\operatorname{Ker}f^2$.
   b. Déterminer $\operatorname{Ker}f$ et en donner une base ainsi que sa dimension.
   c. A-t-on $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Ker}f^2$?
3. On note $u=(-2,-1,2)$.
   a. Montrer qu'il existe $v\in\mathbb{R}^3$ tel que $f(v)=u$ et dont la deuxième coordonnée est 1.
   b. Montrer qu'il existe $w\in\mathbb{R}^3$ tel que $f(w)=v$ et dont la deuxième coordonnée est 1.
   c. Montrer que $\mathcal{B}'=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, i.e. $P=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$.
   d. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   e. Déterminer la matrice N de f dans $\mathcal{B}'$. Quelle relation lie A et N ?
4. Pour tout $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note :

$$C_B=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid BM=MB\}.$$

   a. Montrer que, pour tout $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, C_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que $C_N=\operatorname{Vect}(I_3,N,N^2)$.
   c. Montrer que, pour tout $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a

$$M\in C_A\Leftrightarrow P^{-1}MP\in C_N.$$

   d. En déduire que $C_A=\operatorname{Vect}(I_3,A,A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 15. [Corrigé] ★★★

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et D l'application qui, à toute fonction f de E associe f'. On considère les trois fonctions de E suivantes :

$$f_1 : t \mapsto e^t,\ f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\ f_3 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

On note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

1. a. Montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Que peut-on en déduire ?
   b. Montrer que pour tout $f \in G$, $D(f) \in G$.
   On dit que G est stable par D et on note d l'endomorphisme induit par D sur G, i.e. :

$$d : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ f & \mapsto & D(f) = f'. \end{array}$$

   c. Préciser la matrice M de d dans la base $\mathcal{B}$ de G.
   d. Calculer M^3. En déduire que M est inversible et préciser son inverse.
   e. L'application d est-elle un automorphisme ? Si oui, expliciter d^{-1}.

2. On cherche à résoudre l'équation différentielle $y^{(3)} = y$ $(*)$.
   a. Montrer que si f est une fonction solution de $(*)$, alors f est dérivable trois fois et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   b. Soit $T = D^3 - \mathrm{Id}_E$. Montrer que T est un endomorphisme de E.
   c. Montrer que l'ensemble des solutions de $(*)$ est $\mathrm{Ker}\, T$.
   d. Montrer, sans calcul, que $G \subset \mathrm{Ker}\, T$.
   e. On veut désormais montrer l'inclusion réciproque, i.e. $\mathrm{Ker}\, T \subset G$.
      (i) Soit f une solution de $(*)$. On note $g = f + f' + f''$. Montrer que $g' = g$.
      (ii) En déduire g puis f.
      (iii) Conclure.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

1. Après calculs, on trouve que $\operatorname{rg}(A) = 3$. La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donc inversible. Soient $(a, b, c, x, y, z) \in \mathbb{R}^6$. Après calculs, on trouve que :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7y + 3z = a \\ 3x + 9y + 4z = b \\ x + 5y + 3z = c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3}a + 2b - \dfrac{1}{3}c \\ y = \dfrac{5}{3}a - b - \dfrac{1}{3}c \\ x = -2a + b + c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Après calculs, on trouve que $\operatorname{rg}(B) = 3$.

   Puisque $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, la matrice B n'est pas inversible.

3. Après calculs, on trouve que $\operatorname{rg}(C) = 3$.

   Puisque $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, la matrice C n'est pas inversible.

4. Après calculs, on trouve que $\operatorname{rg}(D) = 2$.

   Puisque $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, la matrice D n'est pas inversible.

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

1. a. Soient $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x + x' - \lambda y - y', \lambda x + x', \lambda x + x' + \lambda y + y') \\ &= \lambda(x - y, x, x + y) + (x' - y', x', x' + y') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

L'application f est donc bien linéaire : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0)\}$.
Puisque l'image d'un application linéaire est engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ (si celui-ci est de dimension finie), on a :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(f((1,0)), f((0,1))\Big) = \operatorname{Vect}\Big((1,1,1), (-1,0,1)\Big).$$

Les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(-1, 0, 1)$ n'étant pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Im} f$ (qui est donc de dimension 2). On propose ci-dessous trois méthodes pour déterminer le rang de l'application f :

- Par définition, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$.
- Le rang de f est donné par le rang de sa matrice relativement aux bases canoniques (par exemple) de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

- Puisque $\mathbb{R}^2$ (espace de départ) est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à l'application linéaire f :

$$\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Ker} f = 2.$$

c. L'application f est injective car $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0)\}$.
L'application f n'est pas surjective car $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ (les deux espaces n'ont pas la même dimension).
L'application f n'est donc pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ (ce qu'on savait déjà puisque les deux espaces n'ont pas la même dimension.

2. a. La démonstration de la linéarité de g ne pose aucun problème.

b. On trouve après calculs que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}((-4, 1, 3)\}$.
Puisque l'image d'un application linéaire est engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ (si celui-ci est de dimension finie), on a :

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\Big(g((1,0,0)), g((0,1,0)), g((0,0,1))\Big) = \operatorname{Vect}\Big((1,2), (1,-1), (1,3)\Big).$$

Les vecteurs $(1, 2)$ et $(1, -1)$ n'étant pas colinéaires, ils engendrent un espace de dimension 2, donc $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

- Par définition, $\operatorname{rg} g = \dim \operatorname{Im} g = 2$.

- Le rang de g est donné par le rang de sa matrice relativement aux bases canoniques (par exemple) de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rg} g = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

- Puisque $\mathbb{R}^3$ (espace de départ) est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à l'application linéaire g :

$$\operatorname{rg} g = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} g = 2.$$

c. L'application g est n'est pas injective car $\operatorname{Ker} g \neq \{(0,0,0)\}$.
L'application g est pas surjective car $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.
L'application g n'est donc pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ (ce qu'on savait déjà puisque les deux espaces n'ont pas la même dimension.

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]
Remarquons que $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).
On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f. \end{array}$$

L'application φ est bien une application linéaire (entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels) par linéarité de l'intégrale. L'ensemble E peut être alors vu comme le noyau de φ ; c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. On trouve que $\operatorname{rg}(A) = 3$. Puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice A est inversible.
2. On trouve que $(A - I_3)(A + 3I_3) = 0_3$. En développant le membre de gauche, on trouve que $A^2 + 2A - 3I_3 = 0_3$, ou encore :
$$\frac{1}{3}(A + 2I_3) \times A = I_3.$$
On en déduit que $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I_3)$.
3. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
$A^0 = 0A + 1I_3$, donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I_3$.
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= u_n A^2 + v_n A \\ &= (-2u_n + v_n)A + 3u_n I_3 \\ &= u_{n+1}A + v_{n+1}I_3, \end{aligned}$$
où $u_{n+1} = -2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n$.
La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3u_n.$$
Après calculs, on trouve que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).$$
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 3u_{n-1}$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{4}\left(3 + (-3)^n\right).$$
Attention : cette formule est encore vraie pour $n = 0$ puisque $v_0 = 1$.
On trouve alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right)A + \frac{1}{4}\left(3 + (-3)^n\right)I_3.$$

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

(i)
- Supposons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. On sait déjà que $\{0_E\} \subset \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Il existe alors $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0_E$. Il vient alors que $f(f(y)) = 0_E$, i.e. $y \in \operatorname{Ker} f^2$. Par hypothèse, $y \in \operatorname{Ker} f$. On a alors $x = f(y) = 0_3$. On en déduit alors que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
- Supposons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. On sait déjà que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker} f$, i.e. $f(x) = 0_E$. Posons $y = f(x)$. On a alors $y \in \operatorname{Im} f$ et $f(y) = 0_E$, i.e. $y \in \operatorname{Ker} f$. Puisque $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, $y = 0_E$ par hypothèse, i.e. $x \in \operatorname{Ker} f$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, et ainsi que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

On a donc démontré l'équivalence $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

(ii) • Supposons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Montrons le résultat par analyse-synthèse.

Analyse.

Soit $z \in E$. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$ tel que $z = x + y$.

On a alors $f(z) = f(x) + f(y) = f(y)$. Puisque $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, il existe $z' \in E$ tel que $f(y) = f^2(z')$. On en déduit que $f(z) = f^2(z')$.

Synthèse.

Soit $z \in E$. Puisque $f(z) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, il existe $z' \in E$ tel que $f(z) = f^2(z')$. Le vecteur $f(z')$ est donc un bon candidat pour y. Posons alors $y = f(z')$ et $x = z - y$. On a $z = x + y$, $y \in \operatorname{Im} f$ et :

$$f(x) = f(z) - f(y) = f(z) - f^2(z') = 0_E, \text{ i.e. } x \in \operatorname{Ker} f.$$

La propriété est donc démontrée.

• Supposons que pour tout $z \in E$, il existe $(x, y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f,\ z = x + y$.

On sait déjà que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Soit $u \in \operatorname{Im} f$. Il existe $z \in E$ tel que $u = f(z)$.

Par hypothèse, il existe $(x, y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f,\ z = x + y$. Ainsi :

$$u = f(x) + f(y) = f(y).$$

Puisque $y \in \operatorname{Im} f$, $u = f(y) \in \operatorname{Im} f^2$.

On en déduit que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ et ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

On a donc prouvé que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \forall z \in E, \exists (x, y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f,\ z = x + y$.

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&f(\lambda P + Q)\\
&= (X - a)((\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q)'(a)) - 2((\lambda P + Q) - (\lambda P + Q)(a))\\
&= \lambda [(X - a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a))] + (X - a)(Q' + Q'(a)) - 2(Q - Q(a))\\
&= \lambda f(P) + f(Q).
\end{aligned}$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$(X - a)(P' + P'(a)) \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } 2(P - P(a)) \in \mathbb{R}_n[X],$$

donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On en déduit que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On trouve que $f(1) = f(X) = f\left(X^2\right) = 0$, et pour tout $k \in [\![3, n]\!]$:

$$f\left(X^k\right) = 2 - ka^k + a^{k-1}kX - akX^{k-1} + (k-2)X^k.$$

La matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -a^3 & -2a^4 & \dots & (2-n)a^n\\
\vdots & \vdots & \vdots & 3a^2 & 4a^3 & \dots & na^{n-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & -3a & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & -4a & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 2 & \ddots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -na\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2
\end{pmatrix}$$

3. Les polynômes de la famille $\mathcal{B}$ sont de degrés étagés, ils forment donc une famille libre. Puisque la famille $\mathcal{B}$ est formée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On trouve que $f(1) = f(X - a) = 0$ et :

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ f\left((X-a)^k\right) = (k-2)(X-a)^k.$$

La matrice D de f dans cette base est donc :

$$D = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & (0) & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2
\end{pmatrix}$$

4. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque $f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} \circ f \circ \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, on a :

$$\begin{aligned}
A &= \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\\
&= \operatorname{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})\\
&= PDP^{-1} \text{ où } P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. Par distributivité de la composition sur l'addition, on trouve que $(f-2\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-3\,\mathrm{Id}_E) = 0$ et $(f-3\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)=0$.

2. Montrons le résultat par analyse-synthèse.

   Analyse. Soit $z \in E$.

   Supposons qu'il existe $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)\times \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_E)$ tel que $z = x+y$.

   Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$, $f(x)=2x$. Par un argument analogue, on a $f(y)=3y$.

   Ainsi :

$$\begin{aligned}(f-2\,\mathrm{Id}_E)(z) &= (f-2\,\mathrm{Id}_E)(y) = f(y)-2y = y\\ (f-3\,\mathrm{Id}_E)(z) &= (f-3\,\mathrm{Id}_E)(x) = f(x)-3x = -x,\end{aligned}$$

   ce qui assure l'unicité des vecteurs x et y.

   Synthèse. Soit $z\in E$. Posons $x = -(f-3\,\mathrm{Id}_E)(z)$ et $y = (f-2\,\mathrm{Id}_E)(z)$.

   D'après la question précédente, on a :

$$\mathrm{Im}(f-3\,\mathrm{Id}_E)\subset \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)\subset \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_E).$$

   Puisque $x \in \mathrm{Im}(f-3\,\mathrm{Id}_E)$ et $y\in \mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$, on en déduit que $x\in\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ et $y\in \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_E)$. De plus :

$$x+y = -(f-3\,\mathrm{Id}_E)(z) + (f-2\,\mathrm{Id}_E)(z) = -f(z)+3z+f(z)-2z = z.$$

   Pour tout $z\in E$, il existe donc un unique couple $(x,y)\in \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)\times\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_E)$ tel que $z=x+y$.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$. Il existe $x\in E$ tel que $f(x)=y$. Ainsi $f(y) = f^2(x) = 0_E$, i.e. $y\in \mathrm{Ker}\, f$.

   On en déduit que $\mathrm{Im}\, f\subset \mathrm{Ker}\, f$.

2. Puisque E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E = 3.$$

   D'après la question précédente, $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim\mathrm{Ker}\, f$ donc $2\,\mathrm{rg}\, f\leqslant \mathrm{rg}\, f + \dim\mathrm{Ker}\, f = 3$. On en déduit que $\mathrm{rg}\, f = 0$ ou $\mathrm{rg}\, f=1$. Puisque $f\neq 0$, $\mathrm{rg}\, f = 1$ et ainsi $\dim\mathrm{Ker}\, f = 2$.

3. Raisonnons par analyse-synthèse.

   - **Analyse.** Supposons qu'il existe une base (a,b,c) de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. On en déduit alors que $f(a)=f(b)=0_E$ et $f(c)=a$ puis que b appartient au noyau de f, et a appartient à la fois au noyau et à l'image de f. Puisque (a,b,c) est une base de E, (a,b) est une famille libre de $\mathrm{Ker}\, f$. Puisque $\dim\mathrm{Ker}\, f = 2$, (a,b) forme une base de $\mathrm{Ker}\, f$. On en déduit que $c\notin \mathrm{Ker}\, f$.
   - **Synthèse.** Soit $c\in E\setminus \mathrm{Ker}\, f$. On pose $a = f(c)$. Puisque $a\in \mathrm{Im}\, f$, $a\in\mathrm{Ker}\, f$.

     Par hypothèse $a\neq 0$, donc (a) forme une famille libre, qu'on complète en une base (a,b) de $\mathrm{Ker}\, f$ (qui est de dimension 2).

     Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c = 0_E$. On a alors :

$$\lambda_1 f(a)+\lambda_2 f(b)+\lambda_3 f(c) = 0_E,$$

     i.e. $\lambda_3 a = 0_E$. Puisque $a\neq 0_E$, $\lambda_3 = 0$ et ainsi $\lambda_1 a+\lambda_2 b = 0_E$. Puisque (a,b) est libre, $\lambda_1=\lambda_2=0$. On en déduit que la famille $\mathcal{B}=(a,b,c)$ est libre ; elle forme donc une base de E.

     Puisque $f(a)=f(b)=0_E$ et $f(c)=a$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3 = 0$, i.e.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \big(\lambda_1+\lambda_2(x-1)+\lambda_3(x^2+1)\big)e^{-x} = 0.$$

   On en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda_1+\lambda_2(x-1)+\lambda_3(x^2+1) = 0.$$

   On pourrait montrer que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ par évaluation en trois réels mais on peut invoquer ici la liberté de la famille polynômiale $(1, X-1, (X^2+1))$ (polynômes non nuls de degrés deux-à-deux distincts) pour obtenir le même résultat. On en déduit que la famille $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3)$ est libre ; c'est donc une base de $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$.

2. L'application Φ est linéaire par linéarité de la dérivation.

   Après calculs, on trouve que : $\Phi(f_1) = -f_1\in F$, $\Phi(f_2) = f_1 - f_2\in F$ et $\Phi(f_3) = 2f_1+2f_2-f_3\in F$.

   Ainsi $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathrm{Vect}(\Phi(f_1),\Phi(f_2),\Phi(f_3))\subset F$, montrant ainsi que Φ est un endomorphisme de F.

D'après les calculs, La matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est donc la matrice triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons qu'on peut écrire $A = -I_3 + J$, où :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque les matrices I_3 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (J - I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} J^k.$$

Puisque :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve que $J^3 = 0_3$ (et ainsi $J^k = 0_3$ pour tout $k \geqslant 3$). On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ A^n &= (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nJ + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} J^2 \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n & n^2 - 3n \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1. Remarquons que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1 - X) = \lambda P(1 - X) + Q(1 - X) = \lambda f(P) + f(Q).$$

L'application f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. L'idée était ici de remarquer que la matrice A est celle qui représente l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (qu'on notera $\mathcal{B}_c$) :

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1, n]\!],\ f\left(X^{j-1}\right) &= (1 - X)^{j-1} \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \binom{j-1}{k} X^k \\ &= \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} X^{i-1}. \end{aligned}$$

Puisque $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$, $A^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}\left(f^2\right)$. Or $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ puisque, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $f^2(P) = f(P)(1 - X) = P(1 - (1 - X)) = P(X)$.

On en déduit que $A^2 = I_n$, et ainsi que A est inversible, d'inverse la matrice A elle-même.

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, on a (puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie) :

$$\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}).$$

Or $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$, donc $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 1$.

En appliquant le même raisonnement, on trouve que $\dim(f - 3\,\mathrm{Id}) = 1$.

Enfin, toujours par le même raisonnement, on trouve que la matrice de $(f - 3\,\mathrm{Id})^2$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a immédiatement $\mathrm{rg}(A - 3I_3)^2 = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})^2 = 2$ par le théorème du rang.

2. Montrons le résultat par analyse-synthèse.

   Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Supposons qu'il existe un unique couple $(y,z) \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \times \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})^2$ tel que $x = y + z$.

   Puisque $(f - 3\,\mathrm{Id})^2 = f^2 - 6f + 9\,\mathrm{Id}$ et $f(y) = y$, $(f - 3\,\mathrm{Id})^2(x) = f^2(y) - 6f(y) + 9y = 4y$.

   La dernière égalité assure l'unicité de y (et donc celle de z puisque $z = x - y$).

   Synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Posons :

   $$y = \frac{1}{4}(f - 3\,\mathrm{Id})^2(x) \text{ et } z = x - y.$$

   Vérifions que $y \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $z \in \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})^2$.

   Un calcul montre que $(A - I_3) \times (A - 3I_3)^2 = 0_3$. Ainsi $\operatorname{Im}(f - 3\,\mathrm{Id})^2 \subset \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, ce qui implique que $y \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

   Remarquons que :

   $$(f - 3\,\mathrm{Id})^2(z) = (f - 3\,\mathrm{Id})^2(x) - \frac{1}{4}(f - 3\,\mathrm{Id})^4(x).$$

   Or un second calcul montre que $(A - 3I_3)^4 = 4(A - 3I_3)^2$. On en déduit donc que $z \in \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})^2$, ce qui conclut le raisonnement.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

1. Soit $y \in \operatorname{Im}(u^2 + \mathrm{Id})$. Il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = (u^2 + \mathrm{Id})(x) = u^2(x) + x$.

   Ainsi $u(y) = u^3(x) + u(x) = 0$, ce qui signifie que $y \in \operatorname{Ker} u$.

   On en déduit que $\operatorname{Im}(u^2 + \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker} u$.

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

   Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

   Supposons qu'il existe un unique couple $(y,z) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$ tel que $x = y + z$.

   On a alors $(u^2 + \mathrm{Id})(x) = (u^2 + \mathrm{Id})(y) = y$, ce qui assure l'unicité de y (et donc celle de z puisque $z = x - y$.

   Synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

   Posons $y = (u^2 + \mathrm{Id})(x)$ et $z = x - y$. Montrons que $y \in \operatorname{Ker} u$ et $z \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.

   Puisque $y \in \operatorname{Im}(u^2 + \mathrm{Id})$, $y \in \operatorname{Ker} u$ d'après la première question. De plus :

   $$(u^2 + \mathrm{Id})(z) = u^2(z) + z = u^2(x) - u^2(y) + x - y = (u^2 + \mathrm{Id})(x) - y = 0.$$

   On en déduit que $z \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$, ce qui conclut l'analyse-synthèse :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \exists!(y,z) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}),\ x = y + z.$$

3. Puisque l'endomorphisme u est non nul, $\dim \operatorname{Ker} u < 3$. On en déduit que $\operatorname{rg}(u^2 + \mathrm{Id}) < 3$ et, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}) > 0$, i.e. $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Corrigé de l'exercice 13. [Énoncé]

Puisque f et Id_E commutent, on a :

$$(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = f^3 - \mathrm{Id}_E = -\mathrm{Id}_E\,.$$

On en déduit que $f - \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E, et de réciproque $-f^2 - f - \mathrm{Id}_E$.

De manière analogue, on a :

$$(f + \mathrm{Id}_E) \circ (f^2 - f + \mathrm{Id}_E) = f^3 + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E\,.$$

On en déduit que $f + \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E, et de réciproque $f^2 - f + \mathrm{Id}_E$.

Corrigé de l'exercice 14. [Énoncé]

1. a. Après calculs, on trouve que la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de rang 2, elle n'est donc pas inversible.

   b. Après calculs, on trouve que : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$. On en déduit que $\operatorname{rg}\left(A^2\right) = 1$ et $\operatorname{rg}\left(A^3\right) = 0$.

2. a. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_E$ et ainsi $f^2(x) = f(0_E) = 0_E$. On en déduit que $x \in \operatorname{Ker} f^2$ et ainsi que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

   b. On trouve après calculs que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u)$ où $u = (-2,-1,2)$. Puisque $u \neq 0$, (u) forme une base de $\operatorname{Ker} f$, qui est donc de dimension 1.

   c. D'après le théorème du rang (applicable puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie), $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 3 - \operatorname{rg} f^2 = 3 - \operatorname{rg} A^2 = 2 \neq \dim \operatorname{Ker} f$.

   On en déduit donc que $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Ker} f^2$.

3. a. Soit $v = (x,1,z) \in \mathbb{R}^3$. Après calculs, on trouve que :

   $$f(v) = u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

   Le vecteur $v = (1,1,-2)$ vérifie donc bien $f(v) = u$.

   b. Par le même raisonnement, on trouve $w = (6,1,-3)$.

c. Après calculs, on trouve que :

$$\mathrm{rg}(u,v,w) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

On en déduit que $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
La matrice P de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est donc :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

d. Puisque Id est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$, la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ est inversible.
On trouve après calculs :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -5 \\ -1 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad (= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})).$$

e. Puisque u engendre $\mathrm{Ker}\, f$, $f(u) = 0$. Par définition, $f(v) = u$ et $f(w) = v$. La matrice N de f dans $\mathcal{B}'$ est donc la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $f = \mathrm{Id} \circ f \circ \mathrm{Id}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}),$$

i.e. $N = P^{-1}AP$.

4. a. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Remarquons que C_B est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $0_3 \in C_B$ puisque $0_3 B = 0_3 = B0_3$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(M, M') \in C_B$, on a :

$$(\lambda M + M')B = \lambda MB + M'B = \lambda BM + BM' = B(\lambda M + M'),$$

i.e. $\lambda M + M' \in C_B$. On en déduit que C_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. On commence par calculer N^2 : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors :

$$M \in C_N \Leftrightarrow NM = MN \Leftrightarrow \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$C_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2).$$

c. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in C_A &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow PNP^{-1}M = MPNP^{-1} \\ &\Leftrightarrow N(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)N \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N. \end{aligned}$$

d. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} M \in C_A &\Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2) \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P^{-1}MP = aI_3 + bN + cN^2 \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = aI_3 + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $C_A = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.
L'étude de la liberté de la famille (I_3, A, A^2) montre que cette famille forme une base de C_A, qui est donc de dimension 3.

Corrigé de l'exercice 15. [Énoncé]

1. a. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$, i.e. :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ae^t + be^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + ce^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

En multipliant par e^{-t}, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a + be^{-\frac{3t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + ce^{-\frac{3t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

En passant à la limite lorsque t tend vers $+\infty$, on trouve $a = 0$. En évaluant en $t = 0$, on obtient $c = 0$. Il vient immédiatement que $b = 0$.

On en déduit que $\mathcal{B}$ est libre et donc une base de G.

b. Après calculs, on trouve que $D(f_1) = f_1 \in G$ et :

- $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \in G,$
- $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3 \in G.$

Pour tout $f \in G$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f = af_1 + bf_2 + cf_3$, et ainsi par linéarité de l'application D, on a :

$$D(f) = aD(f_1) + bD(f_2) + cD(f_3) \in G.$$

On a donc bien montré que pour tout $f \in G,\ D(f) \in G$.

c. On trouve immédiatement que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

d. On obtient $M^3 = I_3$, ce qui signifie que M est inversible, d'inverse :

$$M^{-1} = M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e. La matrice de l'endomorphisme d étant inversible, d est un automorphisme de G et $d^{-1} = d^2$. On en déduit que d^{-1} est l'opérateur de dérivation seconde :

$$d^{-1} : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ f & \mapsto & f''. \end{array}$$

2. a. Si f est une solution de $(*)$ alors f est nécessairement trois fois dérivable pour vérifier $f^{(3)} = f$. Un raisonnement par récurrence (à faire !) montrerait que f est $\mathcal{C}^{3n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{C}^\infty$.

b. Puisque la dérivée de toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, l'opérateur D est un endomorphisme de E (la linéarité est déjà connue).

Par opérations sur les endomorphismes, $T = D^3 - \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E.

c. Une fonction y de E est solution de $(*)$ si, et seulement si, $y^{(3)} - y = 0$, i.e. si, et seulement si, $D^3 - \mathrm{Id}_E(y) = 0$, ce qui revient à $T(y) = 0$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de $(*)$ est $\mathrm{Ker}\, T$.

d. On a démontré à la question 1.d que $M^3 = I_3$, i.e pour tout $f \in G,\ f^{(3)} = f$.

On obtient donc bien que $G \subset \mathrm{Ker}\, T$.

e. (i) Soit f une solution de $(*)$. La fonction g est bien dérivable puisque f est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$g' = f' + f'' + f^{(3)} = f' + f'' + f = g.$$

(ii) La résolution de l'équation différentielle $g' = g$ montre qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = Ke^x$.

Soit $K \in \mathbb{R}$. La résolution de l'équation différentielle $f'' + f' + f = Ke^x$ nous donne une expression de f :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{K}{3}e^x + \lambda e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

On en déduit que $f = \frac{K}{3}f_1 + \lambda f_2 + \mu f_3 \in G$. On a donc bien prouvé l'inclusion réciproque $\mathrm{Ker}\, T \subset G$.

f. Puisque $\mathrm{Ker}\, T = G$, l'ensemble des solutions de $(*)$ est le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ de E.