Questions de cours

1. Énoncer l'inégalité triangulaire pour les séries.

2. Donner la définition d'un système complet d'événements.

3. Énoncer la caractérisation d'une racine multiple d'un polynôme.

Exercice 1

On considère le code ci-dessous

```
def d(n):
    L=[1]
    for nombre in range(2,n+1):
        if n%nombre==0:
            L.append(nombre)
    return L
```

1. Quel est le résultat de `d(4)` ? de `d(10)` ? Que fait la fonction `d`.

2. On dit qu'un entier k est un diviseur non trivial de n si k divise n et si k diffère de 1 et n. Écrire une fonction `somme` qui renvoie la somme des carrés des diviseurs non triviaux de l'entier passé en argument.

3. Écrire une suite des instructions permettant d'afficher tous les nombres entiers inférieurs à 1000 et égaux à la somme des carrés de leurs diviseurs non-triviaux.

Exercice 2

On considère le polynôme $P = X^3 - X + 1$.

1. Montrer que P admet une unique racine réelle, qu'on notera α. *On pourra étudier - avec rigueur et application - la fonction* $P : x \mapsto x^3 - x + 1$ *sur* $\mathbb{R}$.

2. Justifier que $\alpha < -1$.

3. Notons β et γ les deux autres racines (non nécessairement distinctes) de P. Exprimer $\beta + \gamma$ et $\beta\gamma$ en fonction de α.

4. Justifier que β et γ sont complexes conjugués. En déduire que $|\beta| = |\gamma| < 1$.

5. Montrer que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$.

Exercice 3

Soit γ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n = \dfrac{1}{n^\gamma} - \dfrac{1}{(n+1)^\gamma}$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ converge et calculer sa somme.

2. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\gamma}{n^{\gamma+1}}$.

3. En déduire que, pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 4

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On note P_k (resp. F_k) l'événement "on obtient pile (resp. face) au k-ème lancer".

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note A_k l'événement on obtient pour la première fois consécutivement pile puis face (dans cet ordre) aux lancers $k-1$ et k.

Pour ne pas surcharger l'écriture, on pourra écrire par exemple P_1F_2 pour désigner l'événement $P_1 \cap F_2$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_2)$.
2. a. Après avoir montré rigoureusement l'égalité d'événements $A_3 = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$, calculer $\mathbb{P}(A_3)$.
   b. Écrire alors sans justification, pour tout $k \geqslant 3$, l'événement A_k comme réunion de $k-1$ événements disjoints.
   c. En déduire que $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{k-1}{2^k}$ pour tout $k \geqslant 2$.
   d. Calculer la probabilité qu'on n'obtienne jamais consécutivement pile puis face.
3. Dans cette question, on se propose de retrouver le résultat de la question 2.c par une autre méthode.
   a. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3. Montrer par double inclusion l'égalité d'événements :
   $$P_1 \cap A_k = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k.$$
   b. Justifier que, pour tout $k \geqslant 3$, $\mathbb{P}_{F_1}(A_k) = \mathbb{P}(A_{k-1})$.
   c. En utilisant la formule des probabilités totales, en déduire que :
   $$\forall k \geqslant 3,\ \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{2^k}.$$
   d. On pose, pour tout $k \geqslant 2$, $u_k = 2^k \mathbb{P}(A_k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k \geqslant 2}$ est arithmétique. Retrouver alors le résultat annoncé.
4. **[5/2]** On note X la variable aléatoire égale à un entier $k \geqslant 2$ si, et seulement si, l'événement A_k est réalisé, et égale à 0 si aucun événement A_k n'est réalisé. Montrer que X admet une espérance qu'on calculera.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E) suivante à résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 1[$:

$$(E) : \forall x \in]-\infty, 1[,\ y(x) + (x-1)y'(x) = e^{-x}.$$

1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (H) associée à (E).
   b. Résoudre (E).
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in]-\infty, 1[,\ f(x) = \dfrac{1}{e^x(1-x)}$.
   a. Démontrer que f est l'unique solution de (E) satisfaisant la condition initiale $y(0) = 1$.
   b. Étudier les variations de f et ses limites en $-\infty$ et 1.
3. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

Exercice 6

Soit $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. À l'aide de développements limités (à l'ordre 1) et/ou d'équivalents usuels, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}.$$

* *
*