Exercice 1

1. On trouve que `d(4) = [1,2,4]` et `d(10) = [1,2,5,10]`. La fonction `d` renvoie la liste des diviseurs de l'entier passé en argument.

2.
```python
def somme(n):
    diviseurs = d(n)
    s = 0
    for div in diviseurs[1:-1]: # on oublie les diviseurs triviaux
        s += div**2
    return s
```

3.
```python
L = []
N=1000
for n in range(1,N+1):
    if somme(n)==n:
        L.append(n)
```

On peut aussi écrire (pour les esthètes !) :

```python
L = [n for n in range(1,N+1) if somme(n)==n]
```

Exercice 2

On considère le polynôme $P = X^3 - X + 1$.

1. La fonction P est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynômiale) et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, on peut dresser le tableau de variations de la fonction P :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\searrow$	$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarquons que :

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0.$$

L'étude des variations garantit alors que la fonction P est strictement positive (donc ne s'annule pas) sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$. Puisque la fonction P est continue strictement croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, elle réalise une bijection de $I =]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ vers $J = \left]-\infty, P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$.

Puisque $0 \in J$, <u>le polynôme P admet une unique racine réelle</u>.

2. Remarquons que $P(-1) = 1 > 0 = P(\alpha)$. Puisque la fonction P est strictement croissante sur l'intervalle I et puisque $(-1, \alpha) \in I^2$, $\boxed{\alpha < -1.}$

3. Puisque le polynôme P est unitaire (son coefficient dominant est égal à 1) et puisqu'on connait toutes ses racines, on peut le factoriser :

$$P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

Par identification des coefficients (des monômes de degré 0 et 2), on trouve que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et $-\alpha\beta\gamma = 1$, i.e. :

$$\boxed{\beta + \gamma = -\alpha \text{ et } \beta\gamma = -\frac{1}{\alpha}.}$$

4. Puisque le polynôme P est à coefficients réels, $\overline{\beta}$ est aussi racine de P. Puisque α est l'unique racine réelle de P, β n'est pas un réel et ainsi $\overline{\beta}$ non plus. On en déduit donc que $\gamma = \overline{\beta}$, i.e. <u>$\beta$ et γ sont complexes conjugués</u>.

On en déduit que :

$$|\beta|^2 = \beta\overline{\beta} = \beta\gamma = -\frac{1}{\alpha} < 1.$$

De la même manière, on trouve que $|\gamma|^2 = -\frac{1}{\alpha}$ et ainsi que $\boxed{|\beta| = |\gamma| < 1.}$

5. Remarquons que :

$$0 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha(\beta+\gamma)+2\beta\gamma = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha^2-\frac{2}{\alpha}.$$

On en déduit que :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2\frac{\alpha^3+1}{\alpha}.$$

Puisque α est racine de P, $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$ et ainsi $\alpha^3 + 1 = \alpha$. On trouve alors bien que $\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2.}$

Exercice 3

1. Soit $N \in\in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme télescopique, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\gamma} - \frac{1}{(n+1)^\gamma} = 1 - \frac{1}{(N+1)^\gamma} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que <u>la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ converge</u> et : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 1.}$

2. Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\gamma - 1}{(n+1)^\gamma}.$$

Or :

$$(1+u)^\gamma - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \gamma u \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\gamma - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{n}$ et :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{n^{\gamma+1}}.}$$

3. Soit $\alpha > 1$. En posant $\gamma = \alpha - 1$, on a $\gamma > 0$. On applique alors le résultat de la question précédente :

$$\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\gamma+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{\gamma}.$$

Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x_n}{\gamma}$ converge aussi.

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^\alpha} > 0$, on peut appliquer le critère d'équivalence des séries à termes positifs : <u>pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.</u>

Exercice 4

1. Remarquons que $A_2 = P_1 \cap F_2$. Par indépendance des lancers, on trouve que :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{4}.}$$

2. a. Montrons l'égalité d'événements $A_3 = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$:
   - Si l'événement A_3 est réalisé, on obtient nécessairement pile au second lancer et face au troisième. Puisqu'on peut obtenir pile ou face au premier lancer, l'événement ci-dessous est réalisé :

$$(P_1 \cup F_1) \cap P_2 \cap F_3 = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$$

   - Réciproquement, supposons que l'événement $(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$ est réalisé. On en déduit qu'on obtient pile au second lancer et face au troisième. Puisque c'est la première fois qu'on obtient une telle séquence, l'événement A_3 est réalisé.

On en déduit donc l'égalité attendue :

$$\boxed{A_3 = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)}.$$

En remarquant que cette réunion est disjointe puis que les lancers sont indépendants, on trouve que :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(P_2)\,\mathbb{P}(F_3) + \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(P_2)\,\mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{4}.}$$

b. Pour tout k un entier naturel supérieur ou égal à 3, A_k est l'événement ci-dessous :

$$(P_1 \dots P_{k-1}F_k) \cup (F_1P_2 \dots P_{k-1}F_k) \cup (F_1F_2P_3 \dots P_{k-1}F_k) \cup (F_1 \dots F_{k-2}P_{k-1}F_k)$$

S'il fallait justifier, on écrirait :
   - *soit on n'obtient jamais face avant le $(k-1)$-ème lancer, et dans ce cas l'événement $P_1 \dots P_{k-1}F_k$ est réalisé ;*
   - *soit on obtient (au moins) un face avant le $(k-1)$-ème lancer et dans ce cas tous les lancers qui le précède sont encore des faces (sinon on obtiendrait PF avant les lancers $k-1$ et k ; un tel événement est de la forme $F_1 \dots F_iP_{i+1} \dots P_{k-1}F_k$, où $i \in [\![1, k-2]\!]$.*

c. *L'égalité d'événements de la question précédente n'a été prouvée que pour $k \geqslant 3$. On ne peut donc pas l'utiliser pour $k = 2$.*

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3. En remarquant que la réunion obtenue à la question précédente est disjointe, on trouve, après calculs et par indépendance des lancers, que :

$$\forall k \geqslant 3,\ \mathbb{P}(A_k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

En remarquant que l'égalité est encore vraie pour $k = 2$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(A_k) = \frac{k-1}{2^k}.}$$

d. On cherche à calculer la probabilité de l'événement :

$$B = \bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{A_k} = \overline{\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k}.$$

Puisque les événements $(A_k)_{k\geqslant 2}$ sont deux-à-deux disjoints, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k\right) \\
&= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2^k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] - \left[-1 - \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\right] - \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right] = 1.
\end{aligned}$$

Ne jamais obtenir consécutivement pile puis face est presque-sûrement impossible.

3. a. Montrons le résultat par double inclusion.

Supposons que l'événement $P_1 \cap A_k$ est réalisé. Si on obtenait un face avant le k-ème lancer, on obtiendrait la séquence PF pour la première fois avant les lancers $k-1$ et k (puisque le premier lancer fournit pile), ce qui est impossible. On en déduit que le premier face est obtenu au k-ème lancer et ainsi que l'événement $P_1 \cap P_2 \cap \ldots P_{k-1} \cap F_k$ est réalisé.

Supposons que l'événement $P_1 \cap P_2 \cap \ldots P_{k-1} \cap F_k$ est réalisé. L'événement P_1 est évidemment réalisé et on obtient pour la première fois pile puis face aux $(k-1)$-ème et k-ème lancer. L'événement A_k est ainsi réalisé donc $P_1 \cap A_k$ aussi.

On a ainsi montré l'égalité d'événements :

$$\boxed{P_1 \cap A_k = P_1 \cap P_2 \cap \ldots P_{k-1} \cap F_k.}$$

b. Soit $k \geqslant 3$. Si on obtient face au premier lancer, réaliser l'événement A_k revient à "réinitialiser" l'expérience après le premier lancer et à obtenir la séquence PF pour la première fois après $k-1$ lancers. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \geqslant 3,\ \mathbb{P}_{F_1}(A_k) = \mathbb{P}(A_{k-1}).}$$

c. Soit $k \geqslant 3$. Puisque (P_1, F_1) forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales et la question précédente assurent que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(P_1 \cap A_k) + \mathbb{P}(F_1 \cap A_k) \\
&= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap \ldots P_{k-1} \cap F_k) + \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}_{F_1}(A_k) \\
&= \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(P_2)\ldots\mathbb{P}(P_{k-1})\,\mathbb{P}(F_k) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(A_{k-1}) \quad \text{par indépendance des lancers.}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \geqslant 3,\ \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{2^k}.}$$

d.

$$\begin{aligned}
\forall k \geqslant 2,\ u_{k+1} &= 2^{k+1}\,\mathbb{P}(X = k+1) \\
&= 2^{k+1}\left(\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X=k) + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\
&= 2^k\,\mathbb{P}(X=k) + 1 \\
&= u_k + 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ est arithmétique (de raison 1).
Ainsi, pour tout $k \geqslant 2$, $u_k = u_2 + (k-2) = k-1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(A_k) = \frac{k-1}{2^k}.}$$

4. **[5/2]** Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Étudions la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} k\,\mathbb{P}(X=k)$, ce qui revient à étudier la convergence simple de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k\,\mathbb{P}(X=k)$ puisque X est à valeurs positives.

Soit $n \geqslant 2$. On reconnait ci-dessous une somme partielle de série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ (donc convergente) :

$$\sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

On en déduit que la variable aléatoire X admet une espérance, égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 0\,\mathbb{P}(X=0) + \sum_{k=2}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) = 4.}$$

Exercice 5

1. a. Notons $I =]-\infty, 1[$. L'équation différentielle homogène associée à (E) est :

$$(H) : \forall x \in I,\ y(x) + (x-1)y'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ y'(x) + \frac{1}{x-1}y(x) = 0.$$

La fonction $a : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est continue sur I ; la fonction $A : x \mapsto \ln|x-1| = \ln(1-x)$ est une primitive de a sur ce même intervalle. L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{K}{1-x} \end{array},\ K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

b. Cherchons une solution particulière à (E) de la forme $y : x \mapsto \dfrac{K(x)}{1-x}$ où K est une fonction dérivable sur I.

Pour tout $x \in I$, $y'(x) = \dfrac{K'(x)}{1-x} + \dfrac{K(x)}{(1-x)^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ y(x) + (x-1)y' = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \frac{K(x)}{1-x} + (x-1)\left(\frac{K'(x)}{1-x} + \frac{K(x)}{(1-x)^2}\right) = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ K'(x) = -e^{-x}. \end{aligned}$$

La fonction $(x \mapsto e^{-x})$ étant une primitive de la fonction $(x \mapsto -e^{-x})$, la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1-x}\right)$ est une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{K+e^{-x}}{1-x} \end{array},\ K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2. a. Soit g une solution de (E). Il existe alors $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ g(x) = \frac{K+e^{-x}}{1-x}.$$

Ainsi :

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow K+1 = 1 \Leftrightarrow K = 0 \Leftrightarrow g = f.$$

La fonction f est bien l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$.

b. La fonction f est dérivable sur I (car solution d'une équation différentielle sur I) et (d'après (E))):

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{f(x)}{1-x} + \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{x}{e^x(1-x)^2}.$$

La fonction f est donc (trivialement) décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $[0,1[$.

Remarquons que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{1}{xe^x}$. Par croissances comparées, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

Par opérations sur les limites, on obtient immédiatement que $\boxed{\lim_{x\to1} f(x) = +\infty.}$

3. Pour x au voisinage de 0, $f(x) = e^{-x} \times \dfrac{1}{1+(-x)}$.

Or : $e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2} + o_{u\to0}\left(u^2\right)$ et $\dfrac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o_{u\to0}\left(u^2\right)$. Puisque $\lim\limits_{x\to0} -x = 0$, $e^{-x} = 1-x+\dfrac{x^2}{2} + o_{x\to0}\left(x^2\right)$ et $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o_{x\to0}\left(x^2\right)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1-x+\frac{x^2}{2}+o_{x\to0}\left(x^2\right)\right)\left(1+x+x^2+o_{x\to0}\left(x^2\right)\right) \\ &= 1+\frac{x^2}{2}+o_{x\to0}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 est donc : $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} 1+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right).}$

Exercice 6

Remarquons que $a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln a}$. Or :

$$\begin{cases} e^x = 1+x+o_{x\to0}(x) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln a = 0, \end{cases}$$

Par composition de limites, on en déduit que :

$$a^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il vient alors que (les rôles de a et b sont symétriques) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n &= \left(1+\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(1+\frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left[n\ln\left(1+\frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{cases}\ln(1+x) = x + o_{x\to0}(x) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0,\end{cases}$$

il vient que :

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \exp\left[n\left(\frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[\ln\left(\sqrt{ab}\right)+o_{n\to+\infty}(1)\right]$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} o_{n\to+\infty}(1) = 0$, on trouve bien que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.}$$

* *
*