

Questions de cours

1. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n . Donner deux majorants du rang de cette famille et préciser les cas d'égalité pour chaque inégalité.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Énoncer les deux relations montrant que la fonction de répartition de X (aux points entiers) se déduit de la loi de X et réciproquement.

Exercice 1

Écrire une fonction booléenne en Python qui renvoie **True** si et seulement si une liste ou une chaîne de caractères est un palindrome, i.e. se lit de la même manière de la gauche vers la droite que de la droite vers la gauche.

Par exemple "kayak" et [1,5,4,4,5,1] sont des palindromes mais pas "vengeance pour Vengie" ou [1,5,4,4,5].

Des points bonus seront attribués pour une fonction qui réalisera le minimum de comparaisons.

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble F des solutions de l'équation différentielle $(H) : \forall t \in \mathbb{R}, 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$.
2. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.
3. Déterminer toutes les fonctions f vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, 4f''(t) + 4f'(t) + f(t) = e^{-\frac{t}{2}}$.

On pourra chercher une solution particulière de l'équation différentielle vérifiée par f de la forme $t \mapsto P(t)e^{-\frac{t}{2}}$ où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Exercice 3

Soit u l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de la matrice A . L'endomorphisme u est-il injectif ? surjectif ?
2. Déterminer une base de l'image et du noyau de u .
3. Vérifier que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

4. Le but de cette question est de déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ dans laquelle la matrice de u est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Dans l'hypothèse où une telle base existe, que doivent vérifier les vecteurs e'_1 et e'_3 ?

Que peut-on dire de $u(e'_2)$ et $u \circ u(e'_2)$?

- b. Vérifier que le vecteur $e'_1 = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ appartient au noyau de u .
- c. On pose $e'_2 = (1, 0, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 2)$. Vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- d. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

Exercice 4

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires (mutuellement) indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n (sans nécessairement que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit constante).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et $m_n = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la variance de $\bar{X}_n$.
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m_n| < \varepsilon) = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de $n\bar{X}_n$ lorsque la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

Exercice 5

1. Soit x un réel de l'intervalle $[0, 1[$.

a. (i) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$, donner une expression ramassée de la somme $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.

(ii) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

(iii) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

(iv) En déduire que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

b. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide d'une somme télescopique, établir l'égalité : $\forall q \geq m, \sum_{k=m}^q \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$.

c. Soit n un entier naturel non nul et soit $x \in [0, 1[$. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre x . On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(i) Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x et simulant S_n .

(ii) Déterminer $S_n(\Omega)$, puis établir que :

$$\forall k \geq n+1, \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j) \mathbb{P}(X_{n+1} = k-j).$$

(iii) En déduire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall k \geq n, \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.$$

(iv) En déduire que :

$$\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.$$

2. Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = -\frac{q^k}{k \ln p}$.

a. Vérifier que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs positives.

b. Montrer en utilisant un résultat de la partie 1 que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

c. On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = u_k$. Montrer que X admet une espérance qu'on déterminera.

d. Montrer que X admet une variance égale à $\mathbb{V}(X) = \frac{-q(q + \ln p)}{(p \ln p)^2}$.

3. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Déterminer $Y(\Omega)$ puis montrer que $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p}$.

b. Après avoir montré que pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ on a $\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = -\frac{p^n q^n}{n \ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n} = -\frac{q^n}{n(1+q)^n \ln p}.$$

* *
*