Exercice 1

Pour une séquence `seq` de longueur n, on parcourt les $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ premiers éléments (p éléments si $n = 2p$ ou $n = 2p+1$) qu'on compare aux $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ derniers : `seq[0]` avec `seq[n−1]`, `seq[1]` avec `seq[n−2]`, et plus généralement `seq[k]` avec `seq[n−1−k]` pour tout entier k entre 0 et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

```python
def palindrome(seq):
    n = len(seq)
    for k in range(n//2):
        if seq[k] != seq[n-1-k]:
            return False
    return True
```

Exercice 2

1. L'équation caractéristique associée à (H) est $4r^2 + 4r + 1 = 0$ qui admet une solution double : $r = -\frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\boxed{F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu)e^{-\frac{t}{2}} \end{array} ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

2. Posons $f_1 : t \mapsto te^{-\frac{t}{2}}$ et $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$. On trouve que :

$$F = \left\{ \lambda f_1 + \mu f_2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2).$$

Puisque les fonctions f_1 et f_2 appartiennent au $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions dérivables (continues ou $\mathcal{C}^\infty$ convenait aussi) sur $\mathbb{R}$, F est un sous-espace vectoriel de E donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarquons que la famille (f_1, f_2) est génératrice de F. Étudions sa liberté. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$. Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R},\ (\lambda t + \mu)e^{-\frac{t}{2}} = 0$. En particulier, en évaluant en $t = 0$ et $t = 1$, on trouve que $\mu = 0$ et $\lambda + \mu = 0$ donc que $\lambda = \mu = 0$. La famille (f_1, f_2) est donc une base de F qui est donc de dimension 2.

3. Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = e^{-\frac{t}{2}}.$$

sous la forme $g : t \mapsto (at^2 + bt + c)e^{-\frac{t}{2}}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Or :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = at^2 e^{-\frac{t}{2}} + (bt + c)e^{-\frac{t}{2}}.$$

Puisque toutes les fonctions de la forme $t \mapsto (bt + c)e^{-\frac{t}{2}}$ sont solutions de l'équation homogène associée, cela revient à chercher une solution de la forme $h : t \mapsto at^2 e^{-\frac{t}{2}}$.

La fonction h est deux fois dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) = a\left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right)e^{-\frac{t}{2}}$$
$$h''(t) = a\left[\left(\frac{1}{4}t^2 - t\right)e^{-\frac{t}{2}} + (-t + 2)\,e^{-\frac{t}{2}}\right] = \frac{a}{4}\left(t^2 - 8t + 8\right)e^{-\frac{t}{2}}.$$

La fonction h est solution de (E) si, et seulement :

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R},\ 4h''(t) + 4h'(t) + h(t) = e^{-\frac{t}{2}} \\ \Leftrightarrow\ &\forall t \in \mathbb{R},\ a\left(t^2 - 8t + 8\right)e^{-\frac{t}{2}} + a\left(-2t^2 + 8t\right)e^{-\frac{t}{2}} + at^2 e^{-\frac{t}{2}} = e^{-\frac{t}{2}} \\ \Leftrightarrow\ &\forall t \in \mathbb{R},\ 8a = 1. \end{aligned}$$

On trouve ainsi que la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{8}e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution particulière de (E), ce qui permet de déterminer l'ensemble des solutions de (E) :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(\frac{t^2}{8} + \lambda t + \mu\right)e^{-\frac{t}{2}} \end{array} ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice 3

1. On a immédiatement :

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

L'endomorphisme u est donc de rang 1, il n'est donc pas injectif.

Puisque $\mathrm{rg}(u) \neq \dim \mathbb{R}^3$, u n'est pas surjectif.

2.
   - Soit $X = (x\ y\ z)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})^3$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, u \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}\, A \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -3x - 3y + 3z &= 0 \\ -2x - 2y + 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = x + y.$$

Ainsi :

$\mathrm{Ker}\, u = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\} = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(a, b)$,

où $a = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$ et $b = (0, 1, 1) = e_2 + e_3$.

Les vecteurs a et b n'étant pas colinéaires, (a, b) est donc une base de $\mathrm{Ker}\, u$.

- Puisque $u(e_2) = u(e_1)$ et $u(e_3) = -u(e_1)$, on a :
$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_1), -u(e_1)) = \operatorname{Vect}(u(e_1)).$$
Puisque $u(e_1) = (1, -3, -2)$ est un vecteur non nul, $u(e_1)$ forme une base de $\operatorname{Im} u$.

3. • Première méthode :
$u(e_1) = e_1 - 3e_2 - 2e_3 = (e_1 + e_3) - 3(e_2 + e_3) = a - 3b$.
Ainsi $u(e_1) \in \operatorname{Vect}(a, b)$, i.e. $u(e_1) \in \operatorname{Ker} u$.
On en déduit donc que $\operatorname{Vect}(u(e_1)) \subset \operatorname{Ker} u$, i.e. $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
• Seconde méthode :
Après calculs, on trouve que $A^2 = 0_3$, i.e. $u \circ u$ est l'endomorphisme nul (de $\mathbb{R}^3$).
On en déduit alors que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

4. a. Supposons qu'une telle base existe. Alors $u(e'_1) = 0e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3 = 0$. De même, $u(e'_3) = 0$. Ainsi $(e'_1, e'_3) \in (\operatorname{Ker} u)^2$.
On lit de plus que $u(e'_2) = e'_1$ et on en déduit que $u \circ u(e'_2) = 0$.
b. On remarque que $e'_1 = u(e_1)$. Ainsi $e'_1 \in \operatorname{Im} u$. Puisque $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, $e'_1 \in \operatorname{Ker} u$.
c. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$.
En utilisant les coordonnées des vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) dans la base $\mathcal{B}$, on résout le système suivant :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_3 & = 0. \end{cases}$$
Ce système admet une unique solution donnée par $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille de vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) est donc libre. Puisqu'il s'agit d'une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
d. Puisque $u(e'_1) = 0$, $u(e'_2) = e'_1$ et $u(e'_3) = 0$, on en déduit la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$:
$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 4

1. Puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettent une variance (elles sont finies), la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance donc $\overline{X}_n$ aussi et :
$$\boxed{\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k).}$$

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que la variable aléatoire $\overline{X}_n$ admet une espérance par linéarité et :
$$\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k = m_n.$$
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a :
$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m_m\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k).$$
L'étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ montre qu'elle est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $[0, 1]$. Ainsi :
$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m_m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4} = \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
Par passage au complémentaire, on trouve que :
$$1 \geqslant \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m_m\right| < \varepsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m_m\right| \geqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
Par passage à la limite et théorème d'encadrement de limites, on trouve que :
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m_m\right| < \varepsilon\right) = 1.}$$

3. Notons p la valeur de la suite constante $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Puisque $n\overline{X}_n = X_1 + \cdots + X_n$ est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, la variable aléatoire $n\overline{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice 5

1. a. (i) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$,

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t} \quad \text{car } t \neq 1.}$$

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\left(t \mapsto t^{p-1}\right)$ est continue sur $[0, x]$. Par intégration sur $[0, x]$ et linéarité de l'intégrale, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.}$$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0, x]$, $0 < 1 - x \leqslant 1 - t$ donc $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{t^n}{1-x}$. Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)(1-x)}.}$$

(iv) Par passage à la limite du résultat de la question 1.a.(ii), $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}^*} \dfrac{x^p}{p}$ converge et :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x).}$$

b. En appliquant la formule du triangle de Pascal, on trouve (en reconnaissant une somme télescopique) que, pour tout $q \geqslant m$:

$$\boxed{\sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{q} \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1} = \binom{q+1}{m+1} - \binom{m}{m+1} = \binom{q+1}{m+1}.}$$

c. (i) On commence par écrire une fonction simulant la loi géométrique de paramètre x ; on peut alors sommer les simulations des variables $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

```
import random as rd

def geometrique(x):
    rang = 0
    while rd.random() > x:
        rang += 1
    return rang

def simule_S(n,x):
    somme = 0
    for k in range(n):
        somme += geometrique(x)
     return somme
```

(ii) Puisque $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors $\boxed{S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![.}$
Par indépendance des variables $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ les variables $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.
Puisque $([S_n = j])_{j \geqslant n}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour tout entier naturel $k \geqslant n+1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n+1} = k)\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left([S_n = j] \cap [S_{n+1} = k]\right) \ \text{(la série converge par σ-additivité)}\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left([S_n = j] \cap [S_n + X_{n+1} = k]\right)\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k - j]\right)\\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = j)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k - j) \ \text{par indépendance de S_n et X_{n+1}}\\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k - j) \ \text{car } \forall j \geqslant k,\ [X_{n+1} = k - j] = \emptyset\\
&= \boxed{\sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k - j),}
\end{aligned}$$

(iii) • Initialisation. Pour $n=1$, on a :

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(S_1=k) &= \mathbb{P}(X_1=k)\\ &= x(1-x)^{k-1}\\ &= \binom{k-1}{0}x^n(1-x)^{k-n}\\ &= \binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}.\end{aligned}$$

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant n+1,\ \mathbb{P}(S_{n+1}=k) &= \sum_{j=n}^{k-1}\mathbb{P}\left(S_n=j\right)\mathbb{P}\left(X_{n+1}=k-j\right)\\ &= \sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}x^n(1-x)^{j-n}x(1-x)^{k-j-1}\\ &= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\\ &= x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)}\sum_{i=n-1}^{k-2}\binom{i}{n-1}\\ &= \binom{k-1}{n}x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)} \quad \text{(d'après 1.b).}\end{aligned}$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi

$$\boxed{\forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}.}$$

(iv) Puisque $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$

$$1=\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n)=\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x\in]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}=\frac{1}{x^n}.}$$

2. a. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $q^k>0$ et $-\ln p>0$ (car $p\in]0,1[$) donc $u_k>0$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien à valeurs positives.

b. D'après la question 1.a.(iv), la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{q^k}{k}$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k}=-\ln(1-q)=-\ln p.$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}u_k$ converge et : $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k=1.}$

c. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme partielle de série géométrique de raison q, convergente car $|q|<1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{N}|k\,\mathbb{P}(X=k)|=\frac{-1}{\ln p}\sum_{k=1}^{N}q^k=\frac{-q}{\ln p}\sum_{i=0}^{N-1}q^i\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{-q}{(1-q)\ln p}=\frac{-q}{p\ln p}$$

Puisque la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}k\,\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, <u>X admet une espérance</u> et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{-q}{p\ln p}.}$$

d. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme partielle de série géométrique dérivée de raison q, convergente car $|q|<1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{N}|k^2\,\mathbb{P}(X=k)|=\frac{-1}{\ln p}\sum_{k=1}^{N}kq^k=\frac{-q}{\ln p}\sum_{k=1}^{N}kq^{k-1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{-q}{(1-q)^2\ln p}=\frac{-q}{p^2\ln p}$$

Puisque la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}k^2\,\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, X^2 admet une espérance d'après le théorème du transfert et :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\frac{-q}{p^2\ln p}.$$

La formule de König-Hyugens assure que <u>X admet une variance</u>, égale à :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{-q}{p^2 \ln p} - \frac{q^2}{(p\ln p)^2} \\ &= \boxed{\frac{-q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}}.\end{aligned}$$

3. a. On obtient immédiatement que :

$$\boxed{Y(\Omega) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [\![0,k]\!] = \mathbb{N}.}$$

Puisque $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements, on trouve, en vertu de la formule des probabilités totales (la série ci-dessous converge par σ-additivité) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=0) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-q^k}{k\ln p}\binom{k}{0}p^0q^k \\ &= \frac{-1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(q^2\right)^k}{k} \\ &= \frac{\ln\left(1-q^2\right)}{\ln p} \quad \text{d'après la question 1.a.(iv) et puisque } q^2\in[0,1[\\ &= \frac{\ln((1-q)(1+q))}{\ln p} \\ &= \boxed{1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}}.\end{aligned}$$

b. Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Si $n>k$, $\binom{k}{n} = \binom{k-1}{n-1} = 0$; l'égalité est alors triviale.
Sinon, si $n \leqslant k$, on a :

$$\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{k!}{kn!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{n(n-1)!((k-1)-(n-1))!} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall (n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ \frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}.}$$

Puisque $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements, on trouve, en vertu de la formule des probabilités totales (la série ci-dessous converge par σ-additivité) :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=n) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=n) \quad (\text{car } \forall k<n,\ \mathbb{P}_{[X=k]}(Y=n)=0) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{-q^k}{n\ln p}\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n} \\ &= -\frac{p^nq^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}q^{2k-2n} \\ &= \boxed{-\frac{p^nq^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\left(q^2\right)^{k-n}} \\ &= -\frac{p^nq^n}{n\ln p}\frac{1}{\left(1-q^2\right)^n} \quad \text{d'après la question 1.c.(iv)} \\ &= \boxed{-\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}}.\end{aligned}$$

* * *