Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie.

1 Formules de changement de base

1.1 Matrice de passage

Définition 1

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie.
On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, et on note $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ la matrice :

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) \ = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_E)\Big).$$

Remarque 2 (À retenir)

On parle de la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle car, lors d'un changement de base, on définit les vecteurs de la nouvelle base en fonction de l'ancienne.

Exemple 3

Soient $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On note $\mathcal{B}_2 = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ une autre base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Déterminons $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ et $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$.

Proposition 4

Pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est inversible, d'inverse :

$$(P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2})^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}.$$

Démonstration.

Remarque 5

Toute matrice inversible $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être vue comme une matrice de passage : la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers une base de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont données par les colonnes de la matrice M.

Exemple 6

À l'aide de l'exemple 3, montrons que la matrice P ci-dessous est inversible et déterminons son inverse.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Changement de base

Proposition 7

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit $x \in E$ et soient X et X' les matrices colonnes respectives des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors :

$$X = PX'.$$

Démonstration.

Remarque 8 (Paradoxe !)

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle permet d'exprimer les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, et non l'inverse.

Théorème 9

Soit u un endomorphisme de E et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. En notant $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, on a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)P.$$

Démonstration.

Définition 10

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et B sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque 11

La définition est bien symétrique : si $B = P^{-1}AP$, alors, $A = Q^{-1}BQ$ en posant $Q = P^{-1}$.

Théorème 12

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme, dans des bases éventuellement différentes.

Démonstration.

2 Réduction d'un endomorphisme

2.1 Éléments propres

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel de dimension quelconque (non nécessairement de dimension finie).

Définition 13

Soit u un endomorphisme de E.
Un scalaire λ est dit **valeur propre** de u s'il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$.
Un tel vecteur $x \neq 0_E$ est alors appelé **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, est appelé **spectre** de u.

Proposition-Définition 14

Soit u un endomorphisme de E. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ vérifie :

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \{x \in E \mid u(x) - \lambda x = 0_E\} = \{x \in E \mid \left(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E\right)(x) = 0_E\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de E.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, E_λ s'appelle l'**espace propre** de u associé à la valeur propre λ.

Remarque 15

Un scalaire λ est valeur propre d'un endomorphisme u si, seulement si, $E_\lambda \neq \{0_E\}$.
Dans ce cas, E_λ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ auquel on ajoute 0_E.

Exemple 16

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminons les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de l'endomorphisme φ de E qui, à tout $f \in E$, associe f'.

Remarque 17 (Intérêt des espaces propres)

Si λ est une valeur propre de u, alors la restriction de u à l'espace propre E_λ associé est une homothétie : $\forall x \in E_\lambda,\ u(x) = \lambda x$ (ce qui s'écrit encore $u_{|E_\lambda} = \lambda \,\mathrm{Id}_{E_\lambda}$).

Corollaire 18

Soit u un endomorphisme de E. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } u &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}\\ &\Leftrightarrow u - \lambda \,\mathrm{Id}_E \text{ n'est pas injectif}\\ &\Leftrightarrow u - \lambda \,\mathrm{Id}_E \text{ n'est pas un isomorphisme (si } E \text{ est de dimension finie).}\end{aligned}$$

Proposition 19

Soit u un endomorphisme de E.
Si $x_1, \ldots, x_p \in E$ sont des vecteurs propres de u respectivement associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distinctes, alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre.

Démonstration.

Corollaire 20

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 21

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de u et $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$.
Alors la famille $\mathcal{F}$ obtenue en juxtaposant les familles $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ est libre. En particulier :

$$\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} \leqslant \dim E.$$

Démonstration.

2.2 Endomorphisme diagonalisable

Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 22

Un endomorphisme u de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u, i.e. s'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, e_k soit un vecteur propre de u.

Proposition 23

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Démonstration.

Exemple 24

L'endomorphisme Id_E est diagonalisable (dans n'importe quelle base !) et admet 1 pour unique valeur propre.

Proposition 25 (***Condition suffisante de diagonalisabilité***)

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable

Démonstration.

Remarque 26

La réciproque de ce résultat est fausse : Id_E est diagonalisable mais n'admet qu'une seule valeur propre.

Théorème 27 (***Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité***)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E. Alors :

$$u \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = \dim E.$$

Démonstration.

3 Réduction d'une matrice

3.1 Éléments propres

Définition 28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Un scalaire λ est dit **valeur propre** de A s'il existe une matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$.
Un tel vecteur X est alors appelé **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de A, noté $\mathrm{Sp}(A)$, est appelé **spectre** de A.

Exemple 29

Les vecteurs $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont des vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition 30

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note E_λ (ou plus généralement $E_\lambda(A)$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A, E_λ s'appelle l'**espace propre** de A associé à la valeur propre λ.

Remarque 31

- $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$.
- $E_\lambda \neq \{0\}$ si, et seulement si λ est une valeur propre de A.

Exemple 32

Déterminons l'espace propre E_2 (i.e. associé à la valeur propre 2) de la matrice A définie dans l'exemple 29.

Proposition 33

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n.
Soit u un endomorphisme de E et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

(i) Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est valeur propre de A.

(ii) Un vecteur $x \in E$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si, et seulement le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Démonstration.

Proposition 34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Démonstration.

Remarque 35

En particulier, 0 est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, A n'est pas inversible.

Corollaire 36

Le spectre d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

Démonstration.

3.2 Diagonalisation

Définition 37

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Théorème 38

Soient $\mathcal{B}_1$ une base de E, u un endomorphisme de E. On note A la matrice de u dans $\mathcal{B}_1$.

(i) Si l'endomorphisme u est diagonalisable, alors la matrice A est diagonalisable et on a :

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

en notant $\mathcal{B}_2$ une base de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

(ii) Si la matrice A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Soit $\mathcal{B}_2$ la base de E telle que P soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

L'endomorphisme u est alors diagonalisable et $\mathcal{B}_2$ est une base de vecteurs propres de u, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Remarque 39

On retiendra que ce théorème affirme en particulier que :

> *un endomorphisme (d'un espace vectoriel de dimension finie) est diagonalisable si, et seulement si, l'une de ses matrices (dans n'importe quelle base) l'est aussi.*

Démonstration du théorème 38.

3.3 Pratique de la réduction

Méthode 40. (Réduction matricielle)

Pour réduire une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (i.e. étudier sa diagonalisabilité et la diagonaliser le cas échéant), on procède comme suit :

(i) On détermine les valeurs propres de A en échelonnant en lignes la matrice $A - \lambda I_n$ (ce qui conserve son rang) et on utilise la proposition 34. *Le théorème du rang pour les matrices donne alors la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ.*

(ii) Pour chaque valeur propre , on cherche une base de l'espace propre associé. *On vérifie par le calcul (au brouillon) que les vecteurs colonnes obtenus sont bien des vecteurs propres.*

(iii) On calcule la somme des dimensions des espaces propres et on conclut sur la diagonalisabilité de A.

(iv) Si A est diagonalisable, on construit une base de vecteurs propres en juxtaposant les bases des sous-espaces propres obtenus. En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette base, on peut écrire que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (attention à l'ordre des valeurs propres !).

Exemple 41 (Cas particulier d'une matrice à une seule valeur propre) ♥

Déterminons les éléments propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci-après. Est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 42

Déterminons les éléments propres de la matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ?

Exemple 43

Montrer que la matrice suivante est diagonalisable puis la diagonaliser.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$