CHAPITRE 7

Éléments propres d'un endomorphisme

Après avoir étudié les applications linéaires en général, on s'intéresse ici au cas particulier des endomorphismes. On va chercher à répondre aux problématiques suivantes : peut-on trouver des sous-espaces vectoriels sur lesquels l'action d'un endomorphisme est simple ? Cela suffit-il à comprendre l'action complète de l'endomorphisme sur l'espace de départ ?

SOMMAIRE

1 Formules de changement de base 2
1.1 Matrice de passage 2
1.2 Changement de base 2
2 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice 3
3 Diagonalisabilité 7
4 Pratique de la réduction de matrice 9
4.1 Recherche de valeurs propres 9
4.2 Diagonalisation 11
4.3 Application 13

OBJECTIFS

- Déterminer les éventuel·le·s valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Savoir énoncer et utiliser la condition suffisante et la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.
- Réduire (étudier la diagonalisabilité et diagonaliser le cas échéant) un endomorphisme ou une matrice carrée.
- Connaître et exploiter la panoplie d'outils pour déterminer un spectre.

Dans tout ce chapitre, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1 Formules de changement de base

1.1 Matrice de passage

Définition 1.1

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie.
On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, et on note $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, la matrice :

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) \quad \Big(= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_E) \Big).$$

Remarque 1.2

On parle de la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle car, lors d'un changement de base, on définit les vecteurs de la nouvelle base en fonction de l'ancienne.

Exemple 1.3

Soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On note $\mathcal{B}_2 = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ une autre base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

Propriété 1.4

Pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est inversible, d'inverse :

$$(P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2})^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}.$$

Exemple 1.5 – Suite de l'exemple 1.3

Déterminer l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

Remarque 1.6

Toute matrice inversible de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être vue comme une matrice de passage : celle de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers la base de vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont données par les colonnes de M. C'est bien une base : la matrice est de rang n, donc ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1.2 Changement de base

Propriété 1.7

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Soit $x \in E$ et soient X_1 et X_2 les matrices colonnes respectives des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors :

$$X_1 = PX_2.$$

Exemple 1.8

Notons $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f_1 = e_1 + e_2 \text{ et } f_2 = e_1 - e_2.$$

Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, les coordonnées X_1 et X_2 du vecteur $x = 2f_1 + f_2$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ puis calculer PX_2.

Remarque 1.9 – (Paradoxe !)

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle permet d'exprimer les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, et non l'inverse.

Théorème 1.10 – Formule de changement de base

Soit u un endomorphisme de E et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. En notant $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, on a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)P.$$

Démonstration. *En remarquant que* $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_E)$*, on trouve que :*

$$\begin{aligned} P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)P &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_E))^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_E \circ u \circ \mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u). \end{aligned}$$

□

Définition 1.11

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque 1.12

La définition est bien symétrique : si $B = P^{-1}AP$, alors $A = Q^{-1}BQ$ en posant $Q = P^{-1}$.

Théorème 1.13

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme, dans des bases éventuellement différentes.

2 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition 2.1 – Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est alors appelé **vecteur propre** de u associé à λ. L'ensemble des valeurs propres de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, est appelé **spectre** de u.

Définition 2.2 – Valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de A s'il existe une matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX = \lambda X$. Un tel vecteur X est alors appelé **vecteur propre** de A associé à λ. L'ensemble des valeurs propres de A, noté $\mathrm{Sp}(A)$, est appelé **spectre** de A.

Propriété 2.3

Soit u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$.
Alors :

- la matrice A et l'endomorphisme u ont le même spectre : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$;
- un vecteur $x \in E$ est vecteur propre de u, associé à une valeur propre λ, si, et seulement si, la matrice colonne X des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ ($X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$) est vecteur propre de A, associé à la même valeur propre λ.

Démonstration. *Il suffit de remarquer que, pour tout $x \in E$, on a, en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$:*

$$\begin{cases} u(x) = \lambda x \\ x \neq 0_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AX = \lambda X \\ X \neq 0. \end{cases}$$

Ainsi, toute valeur propre de u est valeur propre de A et réciproquement. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$.
Le deuxième point est immédiat. □

Remarque 2.4 – Conséquence pratique

Pour étudier les éléments propres (valeurs propres, vecteurs propres) de u, on peut toujours s'intéresser à ceux de n'importe laquelle de ses matrices A, dans n'importe quelle base. Réciproquement, la détermination des éléments propres d'une matrice A fournit immédiatement ceux de u.

Il n'est pas nécessaire de chercher ou connaitre le spectre d'une matrice pour vérifier qu'un vecteur est vecteur propre (d'une matrice ou d'un endomorphisme), comme on l'illustre dans l'exemple suivant.

Exemple 2.5 – Vérifier qu'un vecteur est vecteur propre ♥

Vérifier que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Préciser chaque valeur propre associée.

Démonstration. *Puisque $AX = 5X$ et $X \neq 0$, X est vecteur propre de A, associé à la valeur propre 5.*
Puisque $AY = 2Y$ et $Y \neq 0$, Y est vecteur propre de A, associé à la valeur propre 2. □

Remarque 2.6

Le produit d'une matrice carrée par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice carrée, dont les scalaires sont les coefficients sont ceux du vecteur colonne.
Pour l'illustrer, reprenons l'exemple précédent, et notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice A.

- $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1C_1 + 1C_2 + 1C_3$.
- $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 1C_1 - 1C_2 + 0C_3$.

Propriété 2.7 – Espace propre — cas d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.
Il est appelé **sous-espace propre** de u associé à λ lorsque λ est valeur propre.

Démonstration. *Puisque E_λ est le noyau de l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$, c'est un sous-espace vectoriel de E.* □

Propriété 2.8 – Espace propre — cas d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Il est appelé **espace propre** de A associé à λ lorsque λ est valeur propre.

Démonstration. *Puisque $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.* □

Remarque 2.9

- Dans les deux cas, λ est valeur propre si, et seulement si, le sous-espace propre associé n'est pas réduit à $\{0\}$.
- Un sous-espace propre n'est pas seulement l'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre : il contient le vecteur nul. Sa structure d'espace vectoriel en fait un objet pertinent à étudier, contrairement à l'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre.

Lemme 2.10

Soit u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$.
L'application $x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ qui, à un vecteur de $E_\lambda(u)$, associe la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ établit un isomorphisme entre $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(A)$. En particulier $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(u)$.

Propriété 2.11 – Caractérisations d'une valeur propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Toutes les conditions suivantes sont équivalentes.

- λ est valeur propre de u ;
- $\exists x \in E \setminus \{0_E\},\ (u - \lambda \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E$;
- $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$;
- l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif ;
- $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq 0$;
- $\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \dim E$;
- l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas surjectif ;
- L'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas un isomorphisme (puisque E est de dimension finie).

Propriété 2.12 – Caractérisations d'une valeur propre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Toutes les conditions suivantes sont équivalentes.

- λ est valeur propre de A ;
- $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\},\ (A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$;
- $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$;
- $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq 0$;
- $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \neq n$;
- la matrice $A - \lambda I_n$ n'est inversible.

Remarque 2.13

En particulier, 0 est valeur propre de A si, et seulement si, A n'est pas inversible.

Exemple 2.14

Montrer que 0 est valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Corollaire 2.15

Le spectre d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

Propriété 2.16 – Cas d'un endomorphisme ♥

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $x_1, \dots, x_p \in E$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distinctes, alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Démonstration. *Montrons le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.*

Pour $p = 1$, la famille (x_1) est libre car $x_1 \neq 0_E$ (x_1 est un vecteur propre).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang p. Soient $x_1, \dots, x_{p+1} \in E$ des vecteurs propres de u associés à des

valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distinctes. Soient $\mu_1, \dots, \mu_{p+1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{p+1} \mu_k x_k = 0_E \tag{1}$$

En appliquant u, on trouve par linéarité que $\sum_{k=1}^{p+1} \mu_k u(x_k) = u(0_E)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k \mu_k x_k = 0_E. \tag{2}$$

En appliquant (2) $- \lambda_{p+1}$(1), on obtient $\sum_{k=1}^{p+1} (\lambda_k - \lambda_{p+1}) \mu_k x_k = 0_E$, éliminant ainsi le terme en x_{p+1} :

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_{p+1}) \mu_k x_k = 0_E.$$

Par hypothèse de récurrence, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, donc, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_k - \lambda_{p+1})\mu_k = 0$. Puisque les valeurs propres sont deux à deux distinctes, alors $\mu_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. Ainsi, la relation (1) devient $\mu_{p+1} x_{p+1} = 0_E$. Puisque $x_{p+1} \neq 0_E$, $\mu_{p+1} = 0$. On en déduit donc que la famille $(x_1, \dots, x_{p+1})$ est libre, ce qui conclut la récurrence. □

Propriété 2.17 – Cas d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $(X_1, \dots, X_p)$ est libre.

Démonstration admise (démonstration identique à celle pour un endomorphisme).

Corollaire 2.18 – Cas d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de dimension n. Alors l'endomorphisme u admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est inférieure ou égale à n :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E) \leqslant \dim E.$$

Corollaire 2.19 – Cas d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A admet au plus n valeurs propres distinctes, et la somme des dimensions de ses espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est toujours inférieure ou égale à n :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \leqslant n.$$

Démonstration admise (démonstration identique à celle pour un endomorphisme).

3 Diagonalisabilité

Définition 3.1 – Cas d'un endomorphisme

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Définition 3.2 – Cas d'une matrice

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété 3.3

Soient u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}_1$ une base de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}_1$.
Alors u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable. De plus, si on note :

- $\mathcal{B}_2$ est une base de E formée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (répétitions possibles),
- $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$,
- et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

alors, on obtient la relation $A = PDP^{-1}$.

Théorème 3.4 – Condition nécessaire et suffisante — cas d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à la dimension de E :

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \dim E.$$

Théorème 3.5 – Condition nécessaire et suffisante — cas d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à n :

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = n.$$

Démonstration admise (démonstration identique à celle pour un endomorphisme).

Corollaire 3.6 – Condition suffisante — cas d'un endomorphisme

Si un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors il est diagonalisable.

Corollaire 3.7 – Condition suffisante — cas d'une matrice

Si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, elle est diagonalisable.

Démonstration admise (démonstration identique à celle pour un endomorphisme).

Remarque 3.8

Si on peut appliquer la condition suffisante de diagonalisabilité, il vient immédiatement que tous les espaces propres sont de dimension 1. En effet, la somme de n entiers non nulles (les dimension des sous-espaces propres) ne peut être égale à n que si tous ces entiers sont égaux à 1.

4 Pratique de la réduction de matrice

4.1 Recherche de valeurs propres

Méthode 4.1 – Vérifier qu'un scalaire est valeur propre d'une matrice

Pour vérifier qu'un scalaire λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut, de manière équivalente, utiliser l'une des idées suivantes.

- Exhiber une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$. À moins que le contexte ne nous fournisse un candidat, c'est relativement difficile.
- Vérifier que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, par exemple via son déterminant (si c'est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$), ou en montrant que $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I_n) \neq 0$, ou en calculant $\operatorname{rg}(A-\lambda I_n)$.
- Si les sommes s des coefficients de chaque ligne de A sont égales, alors s est valeur propre de A et le vecteur colonne formé uniquement de 1 est un vecteur propre de A associé à s.

Exemple 4.2

Vérifier que 1 est valeur propre de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration. *Montrons que la matrice $M - I_3$ n'est pas inversible en calculant son rang :*

$$\operatorname{rg}(M - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \end{matrix} = 2 \neq 3.$$

La matrice $M - I_3$ n'est pas inversible donc 1 est valeur propre de M. □

Exemple 4.3

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée uniquement de 1.

1. Montrer que 0 est valeur propre de J_n.
2. Déterminer une autre valeur propre de J_n.

Démonstration.

1. *On s'intéresse à la matrice $J_n - 0I_n = J_n$. Puisque la matrice J_n est de rang 1, elle est donc non inversible. Ainsi 0 est valeur propre de J_n.*
2. *La somme des coefficients de chaque ligne de J_n vaut n. En posant $X = (1 \dots 1)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne uniquement composé de 1, on trouve que :*

$$J_n X = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = nX.$$

Puisque le vecteur X est non nul, n est valeur propre de J_n.

□

Méthode 4.4 – Déterminer le spectre d'une matrice

Pour déterminer le spectre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut utiliser, de manière équivalente, l'une des idées suivantes.

- On cherche l'ensemble des solutions de l'équation $\text{rg}(A - \lambda I_n) = 0$ d'inconnue λ. Pour cela on utilise la méthode du pivot de Gauss pour échelonner la matrice.
- Si $n = 2$, on résout l'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$ d'inconnue λ.
- Si la matrice A vérifie une équation polynomiale, on peut en déduire une équation polynomiale vérifiée par chaque valeur propre de A. Attention, toutes les solutions de cette équation ne sont pas nécessairement valeurs propres de A.

Exemple 4.5 – Détermination du spectre par pivot de Gauss ♥

Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg}\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-2 & Q(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_1 \end{matrix} \end{aligned}$$

où $Q(\lambda) = 1 - (3-\lambda)^2 = -\lambda^2 + 6\lambda - 8$. *Ainsi :*

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+7\lambda-10 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Puisqu'on a échelonné la matrice $A - \lambda I_3$, *on peut lire son rang et ainsi en déduire que :*

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \text{ ou } -\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 5.$$

On en déduit donc que $\text{Sp}(A) = \{2; 5\}$. □

Exemple 4.6 – Détermination du spectre d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$/utilisation du déterminant ♥

Déterminer le spectre de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\det(B - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Or :

$$\lambda \in \text{Sp}(B) \Leftrightarrow B - \lambda I_2 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \det(B - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = i \text{ ou } \lambda = -i.$$

Donc $\text{Sp}(B) = \{i, -i\}$. □

Exemple 4.7 – Utilisation d'une équation polynomiale - suite de l'exemple 4.3 ♥

1. Vérifier que $J_n^2 - nJ_n = 0_n$.
2. En déduire que $\mathrm{Sp}(J_n) \subset \{0, n\}$ (puis que $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}$).

Démonstration.

1. *On trouve immédiatement que :*
$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ_n.$$
2. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(J_n)$. Notons X un vecteur propre associé à la valeur propre λ, i.e. un vecteur non nul tel que $J_nX = \lambda X$. Ainsi :*
$$J_n^2X = J_n(J_nX) = J_n(\lambda X) = \lambda J_nX = \lambda^2 J_n.$$
En multipliant à droite par X l'égalité $0_n = J_n^2 - nJ_n$, on trouve que :
$$0_{n,1} = (J_n^2 - nJ_n)X = J_n^2X - nJ_nX = \lambda^2X - n\lambda X = (\lambda^2 - n\lambda)X.$$
Puisque X est non nul, $\lambda^2 - n\lambda = 0$, i.e. $\lambda = 0$ ou $\lambda = n$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(J_n) \subset \{0, n\}$. Puisqu'on a déjà prouvé que 0 et n sont valeurs propres de J_n (cf. exemple 4.3), ce sont les seules : $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}$.

□

4.2 Diagonalisation

Méthode 4.8 – Étudier la diagonalisabilité d'une matrice

Pour étudier la diagonalisabilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et éventuellement la diagonaliser, on suit les étapes.

1. On détermine le spectre de A. Si $\mathrm{card}\,\mathrm{Sp}(A) = n$, on peut conclure à la diagonalisabilité par la condition suffisante.
2. On détermine une base et la dimension sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres.
3. On conclut à la diagonalisabilité par la condition nécessaire et suffisante. Si c'est le cas, alors la concaténation des bases des sous-espaces propres de A forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En notant $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs de cette base et D la matrice diagonale dont les coefficients correspondent aux valeurs propres associées à chacune des vecteurs propres dans les colonnes de P (dans le même ordre), on obtient la relation $A = PDP^{-1}$.

Exemple 4.9 – suite de l'exemple 4.5 ♥

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
2. Écrire une relation de diagonalisation.

Démonstration.

1. *On sait que $\mathrm{Sp}(A) = \{2; 5\}$. On rappelle que (cf. exemple 4.5) :*
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + 7\lambda - 10 \end{pmatrix}.$$

On trouve immédiatement que $\operatorname{rg}(A-2I_3)=1$ *et* $\operatorname{rg}(A-5I_3)=2$. *En appliquant le théorème du rang, on trouve que* $\dim\operatorname{Ker}(A-2I_3)=2$ *et* $\dim\operatorname{Ker}(A-5I_3)=1$. *Ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres de* A *est égale à 3. Puisque la matrice* A *appartient à* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *elle est diagonalisable.*

2. *Cherchons une base de chaque sous-espace propre. Soit* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   - *En reprenant les calculs du rang de* $A-\lambda I_3$, *on trouve que :*

$$X\in\operatorname{Ker}(A-2I_3)\Leftrightarrow(A-2I_3)X=0_{3,1}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z&=0\\0&=0\\0&=0\end{cases}\Leftrightarrow z=-x-y.$$

   Ainsi :

$$\operatorname{Ker}(A-2I_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

   Puisque les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ *ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de* $\operatorname{Ker}(A-2I_3)$.

   - *En reprenant les calculs du rang de* $A-\lambda I_3$, *on trouve que :*

$$X\in\operatorname{Ker}(A-5I_3)\Leftrightarrow(A-5I_3)X=0_{3,1}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2z&=0\\-3y+3z&=0\\0&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\y=z\end{cases}$$

   Ainsi :

$$\operatorname{Ker}(A-5I_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

   Puisque le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, *est non nul, il forme une base de* $\operatorname{Ker}(A-5I_3)$.

On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, *formée de vecteurs propres de* A. *Ainsi* $A=PDP^{-1}$, *en posant :*

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

□

Exemple 4.10 – suite de l'exemple 4.6 ♥

Justifier que la matrice $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$).

Démonstration. *D'après ce qui précède,* $\operatorname{Sp}(B)=\{i;-i\}$. *En particulier* B *admet deux valeurs propres distinctes. Puisque* $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, *la matrice* B *est diagonalisable, en vertu de la condition suffisante de diagonalisabilité.* □

Exemple 4.11 – Suite des exemples 4.3 et 4.7

Justifier que la matrice J_n est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Démonstration. *On rappelle que* $\mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}$. *De plus,* $\mathrm{rg}(J_n) = 1$ *donc* $\dim \mathrm{Ker}(J_n) = n - 1$ *d'après le théorème du rang. On en déduit que l'espace propre de* J_n *associé à la valeur propre 0 est de dimension* $n - 1$. *Puisque* n *est valeur propre de* J_n, *le sous-espace propre associé est de dimension au moins égale à 1. Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de* J_n *ne peut pas dépasser* n *(*$J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*), elle est exactement égale à* n, *garantissant ainsi que* J_n *est diagonalisable (et que* $\dim \mathrm{Ker}(J_n - nI_n) = 1$*).* □

Exemple 4.12 – Cas d'une matrice à une seule valeur propre ♥

La matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Démonstration. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M - \lambda I_3) &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 \\ 4 & -3-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 4 & -3-\lambda & -2 \\ 4-\lambda & -3 & -1 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 6-4\lambda \\ 0 & 1-\lambda & Q(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (4-\lambda)L_1 \end{matrix} \end{aligned}$$

où $Q(\lambda) = -1 + (4-\lambda)(2-\lambda) = -1 + 8 - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 7$. *Ainsi :*

$$\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 6-4\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

On en déduit que :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

On trouve ainsi que $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$.

Pour étudier la diagonalisabilité de M, *on pourrait vérifier si* $\dim \mathrm{Ker}(M - I_3) = 3$, *mais on va exploiter ici le fait que* M *n'a qu'une seule valeur propre et qu'une matrice diagonale à une seule valeur propre est proportionnelle à la matrice identité. Si* M *était diagonalisable, il existerait une matrice inversible* P *telle que :*

$$M = P\,\mathrm{diag}(1,1,1)P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3,$$

ce qui est absurde. On en déduit que la matrice M *n'est pas diagonalisable.* □

Cet exemple nous pousse à nous poser une question à chercher à la maison : parmi toutes les matrices n'ayant qu'une seule valeur propre, quelles sont celles qui sont diagonalisable ?

4.3 Application

Remarque 4.13 – Calcul d'une puissance de matrice diagonalisable

Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, **on montrera toujours par récurrence** que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \left(PDP^{-1}\right)^k = PD^kP^{-1} = P\ \mathrm{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)\ P^{-1}$$

(les facteurs $P^{-1}P$ intermédiaires se simplifiant deux à deux).

Exemple 4.14 – Calcul d'une puissance de matrice - suite de l'exemple 4.9

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. *On a trouvé à l'exemple 4.9 que $A = PDP^{-1}$, en posant :*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$.
Puisque $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$, la propriété est initialisée.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^k = PD^kP^{-1}$. Alors :

$$A^{k+1} = A^kA = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1},$$

ce qui conclut la récurrence.

Déterminons P^{-1} à l'aide du pivot de Gauss. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + z & = a \\ y + z & = b \\ -x - y + z & = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = a - z \\ y & = b - z \\ 3z & = a + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c \\ y & = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \\ z & = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ A^k &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 5^k \\ 0 & 2^k & 5^k \\ -2^k & -2^k & 5^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{k+1} + 5^k & -2^k + 5^k & -2^k + 5^k \\ -2^k + 5^k & 2^{k+1} + 5^k & -2^k + 5^k \\ -2^k + 5^k & -2^k + 5^k & 2^{k+1} + 5^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Démonstrations à connaitre

- Théorème 1.10 : formule de changement de base.
- Propriété 2.16 : liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
- Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (exemples 4.5 et 4.9).
- Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (exemples 4.6 et 4.10).
- Trouver des valeurs propres candidates pour J_n (exemple 4.7).
- Étude de la diagonalisabilité de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (exemple 4.12).