1 Éléments propres d'un endomorphisme

Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles.
À toute suite $u \in E$, on associe la suite $v = f(u)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}.$$

Déterminer les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f ainsi défini :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & f(u). \end{array}$$

Exercice 2. Exercice théorique ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}\left(u^2\right)$.

   Généraliser le résultat.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $0 \in \mathrm{Sp}\left(u^p\right)$, alors $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

3. Montrer que si a est un automorphisme de E, $\mathrm{Sp}\left(a^{-1}\right) = \left\{\dfrac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\right\}$.

4. Soient a un automorphisme de E et $v = a \circ u \circ a^{-1}$.

   Comparer les spectres et les espaces propres de u et v.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★★★

À tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q = (X-1)(X-2)P' - 2XP.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que si P est un vecteur propre de f, alors $\deg(P) = 2$.

   Indication : on pourra considérer le monôme de plus haut degré de P.

3. Déterminer les valeurs propres et espaces propres associés de f.

   On pourra développer le polynôme $(X+2)(X+3)(X+4)$.

2 Éléments propres d'une matrice

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer leurs éléments propres (valeurs propres et bases des espaces propres) et vérifier si elles sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour chaque matrice diagonalisable A, on déterminera une relation de similitude $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Étude de suites mutuellement récurrentes ♡ [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

      Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} en fonction de X_n.

   b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un expression de X_n en fonction de A et X_0.

   c. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Suite récurrente linéaire d'ordre 3 ♡ [Corrigé] ★★☆

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.
   a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation liant X_{n+1} et X_n.
   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de X_0.
   c. En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Réduction d'une matrice à paramètre [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

3 Problèmes

Exercice 9. ♡ [Corrigé] ★★★

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose :

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base canonique.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de f.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est contenu dans $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$. *On pourra montrer que* $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 10. Système différentiel ♡ [Corrigé] ★★☆

On cherche les couples (x, y) de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$$

Pour un tel couple de fonctions, on introduit la fonction X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$(x, y) \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t).$$
2. Montrer que A est diagonalisable et l'écrire sous la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale.
3. En posant $Y = P^{-1}X$, montrer que :
$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel.