1 Rappels

Théorème 1 (*Théorème fondamental du calcul intégral*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple 2 (à la maison)

La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$.

Théorème 3 (*Inégalité triangulaire*)

Pour toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$, $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

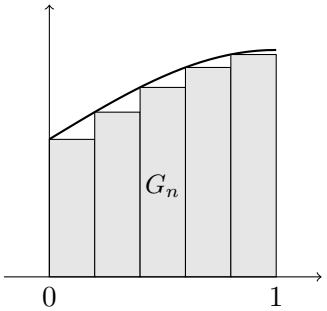
Exemple 4 (à la maison)

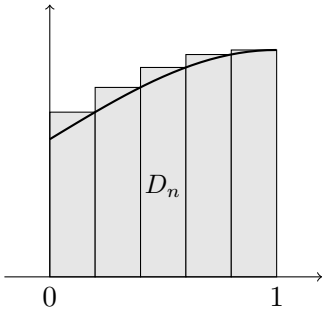
Montrer l'encadrement suivant : $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(2t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Théorème 5 (*Convergence des sommes de Riemann*)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $G_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $D_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Les suites $(G_n)_{n\geqslant 1}$ et $(D_n)_{n\geqslant 1}$ convergent toutes les deux vers le réel $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.





Exemple 6 (à la maison)

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \ln 2$.

Théorème 7 (*Intégration par parties*)

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 8 (à la maison)

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi-2}{4}$.

Théorème 9 (*Théorème du changement de variable*)

Soient $u : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J.
Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x=u(t)}{=} \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 10 (à la maison)

Montrer que $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t+t\ln t} = \ln 2$.

2 Notion d'intégrale généralisée

2.1 Intégration sur un intervalle semi-ouvert

2.1.1 Définitions

Définition 11

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ où $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $a<b$.

On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ **converge** si l'intégrale *partielle* $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque x tend vers b^-.

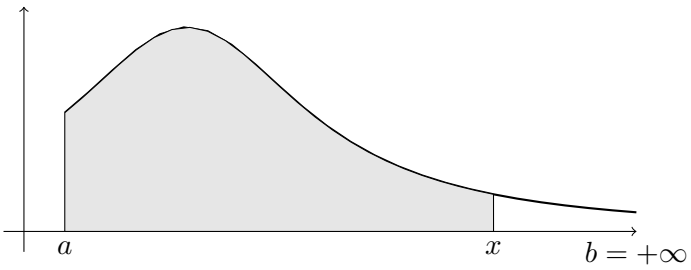
On note alors :

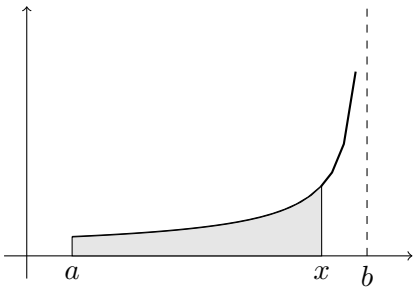
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'intégrale **diverge** dans le cas contraire.

Remarque 12 (Interprétation géométrique)

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, l'aire sous la courbe entre a et x converge lorsque $x \to b$.





Exemple 13 ♡

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 14 ♡

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$.

Exemple 15 ♡

Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Remarque 16 (Attention !)

Une intégrale généralisée est par définition une limite.
On ne peut donc calculer la valeur d'une intégrale généralisée sans avoir **préalablement** justifier sa convergence.

Définition 17

Soit f une fonction continue sur $]a,b]$ où $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ b\in\mathbb{R}$ et $a<b$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ **converge** si l'intégrale *partielle* $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque x tend vers a^+.
On note alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 18 ♡

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 19 ♡

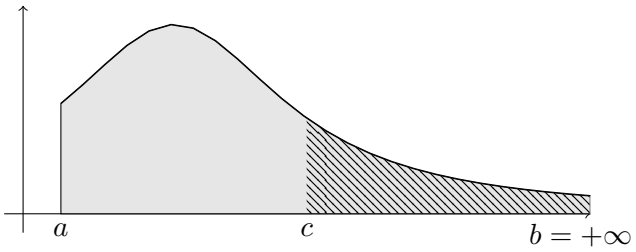
Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2.1.2 Propriétés

Proposition 20 (*Relation de Chasles*)

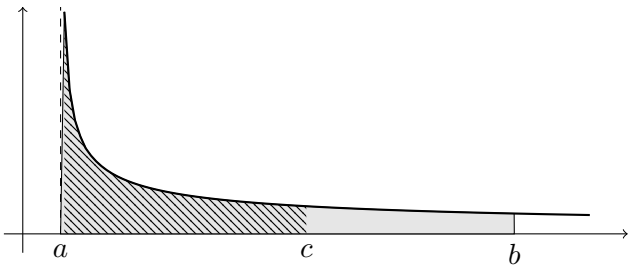
(i) Soient f une fonction continue sur $[a,b[$ et $c \in [a,b[$.

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et et $\displaystyle\int_c^b f$ sont **de même nature**, i.e. $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_c^b f$ converge.



(ii) Soient f une fonction continue sur $]a,b]$ et $c \in]a,b]$.

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et et $\displaystyle\int_a^c f$ sont **de même nature**, i.e. $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^c f$ converge.



En cas de convergence (d'une des intégrales), on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Corollaire 21 (*À retenir !*)

On ne change pas la *nature* d'une intégrale sur un intervalle semi-ouvert en modifiant un nombre fini de valeurs de l'intégrande : la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de la fonction intégrande au voisinage de la borne ouverte de l'intervalle d'intégration.

Théorème 22 (*Linéarité*)

Soient f et g deux fonctions continues sur le même intervalle semi-ouvert I ($= [a,b[$ ou $]a,b]$) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b (f+\lambda g)$ converge et :

$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration admise.

Remarque 23 (Attention !)

Pour pouvoir exploiter la linéarité, il faut préalablement justifier la convergence d'au moins deux intégrales généralisées. Cela évite d'écrire ce genre d'***aberrations*** :

$$\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t \; - \int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t \qquad \text{ou encore} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \; - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}.$$

Corollaire 24

Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)$ diverge.

Démonstration admise.

Remarque 25

Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ divergent, on ne peut rien dire de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f+g)$; pire : tous les cas existent !

Théorème 26 (*Positivité de l'intégrale*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert I ($= [a,b[$ ou $]a,b]$).
Si f est positive sur I et $\displaystyle\int_a^b f$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Démonstration.

Corollaire 27 (*Croissance de l'intégrale*)

Soient f et g deux fonctions continues sur le même intervalle semi-ouvert I ($= [a,b[$ ou $]a,b]$ avec $a<b$).
Si $f \leqslant g$ sur I et si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration admise.

2.2 Cas des fonctions continues sur un segment

Proposition-Définition 28

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.
On dit encore que son intégrale sur $[a,b]$ est **convergente** et on a :

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f}_{\text{intégrale sur un segment}} \underset{(*)}{=} \underbrace{\int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f}_{\text{intégrales généralisées}}.$$

Cette valeur commune est encore notée $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration de l'égalité $(*)$**.**

Remarque 29 (Intégrales faussement impropres)

Si une fonction f continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) admet une limite finie en b^- (resp. a^+), on peut prolonger f en une fonction continue sur $[a,b]$. On peut ainsi affirmer que $\displaystyle\int_a^b f$ converge et on dira que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est **faussement impropre** en b (resp. en a).

Exemple 30 ♡

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

2.3 Intégration sur un intervalle ouvert

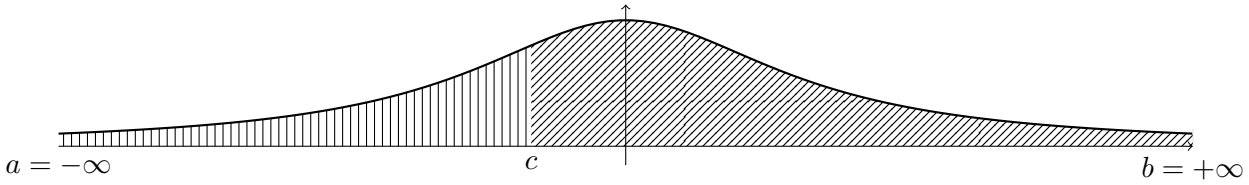
Proposition-Définition 31

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ **converge** s'il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales de f sur $]a,c]$ et $[c,b[$ convergent. Dans ce cas, on note :

$$\int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c,b[} f(t)\,\mathrm{d}t. \quad \text{ou encore} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ni la nature ni la valeur de l'intégrale ne dépendent du choix du réel $c \in]a,b[$.

Démonstration admise.



Exemple 32

Nature et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exemple 33 ♡

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$.

Remarque 34

La nature d'une intégrale sur un intervalle ouvert s'étudie en coupant l'intervalle en deux, et non en étudiant conjointement le comportement aux bornes de l'intervalle, comme illustré ci-dessous.

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_{-x}^{x+1} t\,\mathrm{d}t = x+\frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $\displaystyle\int_{-x}^{x-1} t\,\mathrm{d}t = -x+\frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

On ne peut poser $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t = 0$ ni même $+\infty$ ou encore $-\infty$ car le raisonnement n'est pas conforme à la définition.

En réalité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge car les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ divergent (la divergence de l'une des deux suffit).

Remarque 35 (*Conventions*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Pour tout réel a élément ou extrémité de I, on pose $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

Pour tous réels a et b éléments ou extrémités de I tels que $a<b$, on pose :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

lorsque l'intégrale de f sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ converge.

Théorème 36 (*Propriétés des intégrales généralisées*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

(i) **Linéarité**

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent alors $\int_I (f+\lambda g)$ converge et

$$\int_I (f+\lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g.$$

(ii) **Positivité**

Soit f une fonction continue sur I. Si f est positive sur I et $\int_I f$ converge, alors $\int_I f \geqslant 0$.

(iii) **Stricte positivité**

Soit f une fonction continue sur I. Si f est positive et non nulle sur I et $\int_I f$ converge, alors et $\int_I f > 0$.

(iv) **Croissance**

Soient f et g deux fonctions continues sur I. Si $f \leqslant g$ sur I et si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.

(v) **Relation de Chasles**

Soit f une fonction continue sur I. Si $\int_I f$ converge, alors, pour tout réels a, b et c éléments ou extrémités de l'intervalle I, alors les trois intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

Démonstration admise.

3 Critères de convergence

3.1 Intégrales de références

Proposition 37

(i) Les intégrales $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ divergent.

(ii) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

(iii) L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

(iv) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$.

Démonstration. (i), (ii) et (iii) se retrouvent par un simple calcul de primitive. (iv) est admis.

3.2 Cas des fonctions positives

Théorème 38 (*Critère de comparaison de fonctions positives*)

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $]a,b[$, telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $]a,b[$.

(i) Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge $\left(\text{et } \int_a^b f \leqslant \int_a^b g\right)$.

(ii) Si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g$ diverge.

Démonstration.

Exemple 39

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 40

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Théorème 41 (*Critère d'équivalence*)

(i) Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a,b[$.

Si $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

(ii) Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $]a,b]$.

Si $f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Démonstration.

Exemple 42

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 43

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}$.

3.3 Intégrales absolument convergentes

Définition 44

On dit qu'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ **converge absolument** si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Théorème 45 (*La convergence absolue implique la convergence simple*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si $\displaystyle\int_I |f|$ converge, alors $\displaystyle\int_I f$ converge.

Démonstration.

Exemple 46

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4 Calcul d'intégrales généralisées

4.1 Intégration par parties

Théorème 47 (*Intégration par parties*)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I d'extrémités a et b.
Si le produit uv converge en a et b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
De plus, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration admise.

Exemple 48

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

4.2 Intégration par changement de variable

Théorème 49 (*Changement de variable*)

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]a,b[$. On note $\alpha = \lim\limits_{t\to a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t)$.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle d'extrémités α et β. Alors les intégrales

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

sont de même nature. En cas de convergence, ces deux intégrales sont égales.

Démonstration admise.

Exemple 50

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

4.3 Utilisation de la parité

Proposition 51

Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et f une fonction continue sur $I =]-a, a[$.

(i) Si f est paire, les intégrales $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ et $\displaystyle\int_0^a f$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) Si f est impaire, les intégrales $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ et $\displaystyle\int_0^a f$ sont de même nature. En cas de convergence, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Démonstration (idée) : il suffit de réaliser le changement de variable $x = -t$.

Exemple 52

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$.

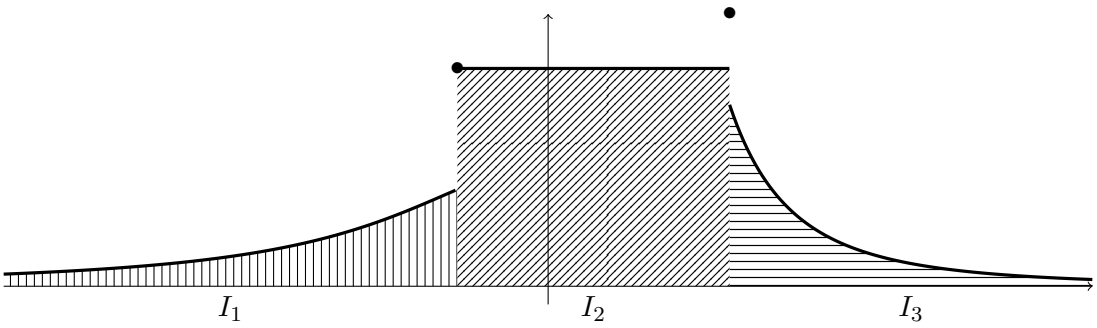
5 Intégration de fonctions continues par morceaux

Définition 53

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I =]a, b[$. Il existe alors $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ telle que f est continue sur chaque intervalle $I_k =]a_k, a_{k+1}[$ (on dit que une **subdivision** de I).

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{I_k} f$ converge pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ **converge** et on note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Exemple 54

Nature et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$