Fonction définie par une intégrale

Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer leur dérivée.

$$g_1 : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad g_2 : x \mapsto \int_0^x x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad g_3 : x \mapsto \int_0^x f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. [Corrigé] ★★☆

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer la limite de f en 0.
   On commencera par calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ à l'aide d'un encadrement.

Exercice 3. [Corrigé] ★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction G est prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (qu'on notera encore G).
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} t f'(t).$$

Sommes de Riemann

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

Exercice 5. [Corrigé] ★★☆

À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★★

Calculer la limite de la suite de terme général $\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

On pourra passer au logarithme pour faire apparaitre une somme de Riemann.

Exercice 7. Méthode des rectangles ♡ [Corrigé] ★★☆

Écrire une fonction `methode_rectangles(f,a,b,n)` qui renvoie une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la méthode des rectangles (en approchant l'aire sous la courbe par celle de n rectangles).

Calcul d'intégrales sur un segment

Exercice 8. [Corrigé] ★★☆

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_1^e t^n \ln t\,\mathrm{d}t\ (n \in \mathbb{N}^*) \qquad I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$$

Suites d'intégrales sur segment

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 10. [Corrigé] ★★☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

1. Calculer $u_0,\ u_1$ et u_2.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$
5. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0.$$
6. En déduire le développement asymptotique : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 11. Intégrales de Wallis [Corrigé] ★★☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$.
On pourra réaliser le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N},\ I_{2p}$ et I_{2p+1} à l'aide de factoriels.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$
5. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Convergence d'intégrales généralisées

Exercice 12. [Corrigé] ★☆☆

Étudier la nature des intégrales généralisées et calculer leur valeur en cas de convergence.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$$

Exercice 13. Intégrales de Riemann ♡ [Corrigé] ★☆☆

Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.
On découpera astucieusement l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 15. Intégration par parties [Corrigé] ★★☆

Étudier la nature des intégrales généralisées ci-dessous puis, en cas de convergence, calculer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16. Changement de variables [Corrigé] ★★★

À l'aide d'un changement de variable, étudier la convergence des intégrales ci-dessous, puis, en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

Problèmes

Exercice 17. Fonction Gamma [Corrigé] ★★☆

Pour tout $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$.
   On pourra calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}}$.
2. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 18. [Corrigé] ★★★

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t.$$

1. À l'aide de $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t}$, montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant te^{-t} \leqslant 1$.
2. En déduire que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.
3. Établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} xF(x) = 0$$
5. Sans déterminer une expression de $F(x)$ en fonction de $x > 0$, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, \mathrm{d}x$ converge.

Exercice 19. Comparaison aux intégrales de Riemann [Corrigé] ★★★

1. Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
   1. On suppose qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = 0$.
      Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
   2. On suppose qu'il existe $\gamma \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = +\infty$.
      Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge.
2. **Convergence des intégrales de Bertrand** $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.
   a. Montrer que $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$.
   b. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t (\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Exercice 20. (hors-programme) [Corrigé] ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.