1 Déterminer la nature d'une intégrale généralisée

Pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée sans chercher à calculer sa valeur en cas de convergence, on suit les étapes suivantes :

(i) **étude de continuité** : on commence toujours par étudier la continuité (ou tout prolongement par continuité) de la fonction intégrande sur l'intervalle d'intégration (on vérifie ainsi si l'intégrale n'est pas faussement impropre) ;

(ii) **linéarité de l'intégrale** : on cherche à écrire l'intégrande comme combinaisons linéaires de fonctions dont la nature de l'intégrale sur l'intervalle d'intégration est connue ;

(iii) **comparaison de fonctions positives** : si l'intégrande est positive sur l'intervalle d'intégration, on cherche à la majorer par une fonction intégrable ;

(iv) **convergence absolue** : on cherche à la majorer en valeur absolue par une fonction intégrable.

Exemple 1. *Étudions la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t-1}{t}$ est continue sur $]0,1]$ par opérations sur les fonctions continues.
Puisque $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$. En posant $f(0) = 1$, on prolonge la fonction f en une fonction continue sur $[0,1]$. On en déduit que l'intégrale converge car faussement impropre.

Exemple 2. *Étudions la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1-x}{x^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ par opérations sur les fonctions continues.
Pour tout $x \geqslant 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge, on en déduit, par linéarité de l'intégrale, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ diverge.
Remarquer qu'on n'a jamais écrit l'horreur $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ *(qui nécessiterait de vérifier* ***au préalable*** *que les intégrales du membre de droite convergent toutes les deux, ce qui n'est pas le cas).*

Exemple 3. *Étudions la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ par opérations sur les fonctions continues.
Pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant g(t) \leqslant e^{-t}$. Puisque l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ aussi.
Par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 4. *Étudions la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $j : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^4+x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions continues.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|j(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^4+x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$.
Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge.

2 Calculer la valeur d'une intégrale généralisée

Lorsqu'on cherche à calculer la valeur d'une intégrale généralisée (que l'on ait préalablement montré sa convergence ou non), on choisit généralement l'une des méthodes suivantes :

- **calcul de primitive et limite(s)** : on cherche une primitive de l'intégrande et calcule ses limites aux bornes de l'intervalle d'intégration ;
- **intégration par parties** : l'étude de la nature de l'intégrale est ramenée à un calcul de limites et l'étude de la nature d'une autre intégrale généralisée ;
- **changement de variable** : l'étude de la nature d'une intégrale généralisée est ramenée à l'étude d'une autre.

Exemple 1. *Calculons la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^e \ln x \,\mathrm{d}x$.

La fonction ln est continue sur $]0,e]$ et admet pour primitive sur cet intervalle la fonction $(x \mapsto x\ln x - x)$.
Soit $A \in]0,e]$.

$$\int_A^e \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x - x\Big]_A^e = -A\ln A + A \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^e \ln x\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

Exemple 2. *Calculons la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$.

Sous réserve de convergence, on a, par intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Or :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} -xe^{-x} = 0$ et, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0$;
- l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Exemple 3. *Calculons la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

La fonction $\big(x \mapsto \sqrt{1+x}\big)$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. En appliquant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$, on a $x = t^2-1$ puis $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et, sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^2(t^2-1)} 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $A \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t - \ln(t+1)\Big]_1^A = \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln 2 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$ converge[1] par changement de variables et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2.$$

[1]Ne pas oublier qu'il faut prouver la convergence de cette intégrale avant de calculer sa valeur !