Exercice 1

```python
def change_signe(L):
    s = 0
    for k in range(len(L)-1):
        if L[k] * L[k+1] < 0:
            s += 1
    return s
```

Exercice 2

1. On trouve immédiatement que $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}.}$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. En notant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement "on obtient face au k-ème lancer", on peut écrire :

$$[X = n] = \bigcup_{k=1}^{n+1} \left(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k} \cap F_{k+1} \cap \dots F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}\right).$$

   En effet, réaliser l'événement $[X = n]$ revient à obtenir un pile et n faces lors de l'un des $n + 1$ premiers lancers et un pile au dernier lancer.

   La réunion étant disjointe et par indépendance des lancers, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k} \cap F_{k+1} \cap \dots F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(F_1) \dots \mathbb{P}(F_{k-1})\, \mathbb{P}\left(\overline{F_k}\right) \mathbb{P}(F_{k+1}) \dots \mathbb{P}(F_{n+1})\, \mathbb{P}\left(\overline{F_{n+2}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p^2 q^n.
\end{aligned}$$

   On en déduit donc que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = (n + 1)p^2 q^n.}$

2. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} |n\, \mathbb{P}(X = n)| &= \sum_{n=0}^{N} n(n + 1)p^2 q^n \\
&= p^2 \left[\sum_{n=0}^{N} n(n - 1)q^n + \sum_{n=0}^{N} 2nq^n\right] \\
&= p^2 \left[q^2 \sum_{n=2}^{N} n(n - 1)q^{n-2} + 2q \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}\right] \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} p^2 \left[q^2 \frac{2}{(1 - q)^3} + 2q \frac{1}{(1 - q)^2}\right] = \frac{2q^2}{p} + 2q = \frac{2q^2 + 2qp}{p} = \frac{2q}{p},
\end{aligned}$$

   en reconnaissant des sommes partielles de séries géométriques de raison $q \in]-1; 1[$ (donc convergentes). On en déduit que <u>X admet une espérance</u>, égale à $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2q}{p}.}$

3. a. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Remarquons qu'il est impossible que tirer un numéro de boule strictement plus grand que le nombre de faces obtenu. Ainsi $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) = 0$ si $k > n$. Dans le cas où $k \in [\![0, n]\!]$, il y a équiprobabilité des numéros de boules donc $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) = \frac{1}{n + 1}$.

   b. Remarquons que $Y(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [\![0, n]\!] = \mathbb{N}$. Puisque $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\, \mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k) \text{ (la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n + 1} \mathbb{P}(X = n) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} p^2 q^n \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^{k+j} \quad \text{en posant } j = n - k \\
&= p^2 q^k \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \\
&= \boxed{pq^k.}
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y+1=k) = \mathbb{P}(Y=k-1) = pq^{k-1}$.

La variable aléatoire $Y+1$ suit donc la géométrique de paramètre p.

c. Puisque $Y+1$ admet une espérance et une variance, la variable $Y=(Y+1)-1$ admet une espérance par linéarité et une variance (par invariance par translation) et :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y+1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y+1) = \frac{q}{p^2}.}$$

d. (i) On trouve que : $\boxed{Z(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [\![0,n]\!] = \mathbb{N}.}$

En utilisant toujours le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z=j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}_{[X=n]}(Z=j) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}_{[X=n]}(X-Y=j) \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}_{[X=n]}(Y=n-j).} \end{aligned}$$

(ii) D'après ce qui précède, on trouve que, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}_{[X=n]}(Y=n-j) \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}_{[X=n]}(Y=n-j) \ \big(\text{si } n<j,\ \mathbb{P}_{[X=n]}(Y=n-j)=0\big) \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} p^2 q^n \\ &= pq^j \text{ d'après les calculs de la question 3.b.} \end{aligned}$$

On en déduit que les variables Y et Z suivent la même loi.

(iii) Pour tout $(k,j) \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y=k]\cap[Z=j]) &= \mathbb{P}([Y=k]\cap[X-Y=j]) \\ &= \mathbb{P}([Y=k]\cap[X=k+j]) \\ &= \mathbb{P}(X=k+j)\,\mathbb{P}_{[X=k+j]}(Y=k) \\ &= p^2 q^{k+j} \\ &= pq^k \times pq^j \\ &= \mathbb{P}(Y=k)\,\mathbb{P}(Z=j). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires Y et Z sont donc indépendantes. .

Exercice 3

1. Puisque $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\boxed{BA \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).}$

2. Puisque f et g sont deux applications linéaires entre deux espaces de dimensions (finies) différentes, ce ne sont pas des isomorphismes.

3. Remarquons que la matrice AB est la matrice de l'endomorphisme $f\circ g$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f\circ g \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow y=z=0.$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} f\circ g = \operatorname{Vect}(e_1)$. Puisque e_1 n'est pas le vecteur nul, il forme une base de $\operatorname{Ker} f\circ g$. On sait que :

$$\operatorname{Im} f\circ g = \operatorname{Vect}(f\circ g(e_1), f\circ g(e_2), f\circ g(e_3)) = \operatorname{Vect}(0, e_2, e_3) = \operatorname{Vect}(e_2, e_3).$$

Puisque la famille (e_2,e_3) est libre ((e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$), elle forme une base de $\operatorname{Im} f\circ g$.

4. Puisque $f\circ g(e_2) = e_2$ et $f\circ g(e_3) = e_3$, en composant par g, on trouve que :

$$\boxed{g\circ f\circ g(e_2) = e_2 \text{ et } g\circ f\circ g(e_3) = e_3.}$$

5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ag(e_2) + bg(e_3) = 0$. En composant par $g\circ f$, on trouve que :

$$ag\circ f\circ g(e_2) + bg\circ f\circ g(e_3) = 0,$$

c'est-à-dire : $ae_2 + be_3 = 0$. Puisque la famille (e_2,e_3) est libre, $a=b=0$. On trouve donc bien que la famille $(g(e_2), g(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

6. Puisque $g \circ f\,(g(e_2)) = e_2$ et $g \circ f\,(g(e_3)) = e_3$, la matrice de $g \circ f$ dans la base $(g(e_2), g(e_3))$ est la matrice I_2. On en déduit que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et ainsi que la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique est l'identité, i.e. :
$$\boxed{BA = I_2.}$$

7. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. On a alors $f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Or $g(f(x)) = x$ d'après la question précédente donc $x = 0_{\mathbb{R}^2}$. L'application f est donc injective.

   Soit $y \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente, $g(f(y)) = y$ donc y admet un antécédent par l'application g. L'application g est donc surjective.

*   *
  *