Exercice 1

Écrire une fonction en Python qui prend en argument une liste de nombres non nuls et qui renvoie le nombre de changements de signes entre deux termes consécutifs.
Par exemple, il y a trois changements de signe dans la liste `[-1,-1.1,-0.9,3,2,-1.5,6]`.

Exercice 2

Soit $p \in]0;1[$. On note $q = 1-p$. On dispose d'une pièce donnant pile avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pile pour la seconde fois (non nécessairement consécutivement). On note X la variable aléatoire égale au nombre de face obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = (n+1)p^2q^n.$$
2. Montrer que X admet une espérance égale à $\dfrac{2q}{p}$.
3. À l'issue de l'expérience, si on a obtenu n faces, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule dans cette urne. On note Y le numéro obtenu.
   a. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y=k)$. *On fera attention à bien distinguer des cas.*
   b. En déduire la loi de Y. Vérifier que $Y+1$ suit une géométrique dont on précisera le paramètre.
   c. En déduire que Y admet une espérance et une variance qu'on déterminera.
   d. On note $Z = X - Y$.
      (i) Déterminer $Z(\Omega)$ puis justifier que :
$$\forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z=j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}_{[X=n]}(Y=n-j).$$
      (ii) En déduire que Y et Z suivent la même loi.
      (iii) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (resp. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$) l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A (resp. B).

1. À quel espace de matrices appartient BA ?
2. Les applications linéaires f et g sont-elles des isomorphismes ?
3. Déterminer une base du noyau et de l'image de l'endomorphisme $f \circ g$.
4. Vérifier que $g \circ f \circ g(e_2) = g(e_2)$ et $g \circ f \circ g(e_3) = g(e_3)$.
5. Montrer que la famille $(g(e_2), g(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. En considérant la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans la base $(g(e_2), g(e_3))$, montrer que $BA = I_2$.
7. En déduire que f est injective et g est surjective.

* *
*