Fonction définie par une intégrale

Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer leur dérivée.

$$g_1 : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad g_2 : x \mapsto \int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t \qquad g_3 : x \mapsto \int_0^x f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. [Corrigé] ★★☆

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer la limite de f en 0.
   On commencera par calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ à l'aide d'un encadrement.

Exercice 3. [Corrigé] ★★★

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction G est prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (qu'on notera encore G).
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} tf'(t).$$

Sommes de Riemann

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

Exercice 5. [Corrigé] ★★☆

À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★★

Calculer la limite de la suite de terme général $\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

On pourra passer au logarithme pour faire apparaitre une somme de Riemann.

Exercice 7. Méthode des rectangles ♡ [Corrigé] ★★☆

Écrire une fonction `methode_rectangles(f,a,b,n)` qui renvoie une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la méthode des rectangles (en approchant l'aire sous la courbe par celle de n rectangles).

Calcul d'intégrales sur un segment

Exercice 8. [Corrigé] ★★☆

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_1^e t^n \ln t\,\mathrm{d}t\ (n\in\mathbb{N}^*) \qquad I_5 = \int_{\frac12}^1 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$$

Suites d'intégrales sur segment

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 10. [Corrigé] ★★☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

1. Calculer $u_0,\ u_1$ et u_2.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$
5. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0.$$
6. En déduire le développement asymptotique : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 11. Intégrales de Wallis [Corrigé] ★★☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$.
   On pourra réaliser le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N},\ I_{2p}$ et I_{2p+1} à l'aide de factoriels.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$
5. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Convergence d'intégrales généralisées

Exercice 12. [Corrigé] ★☆☆

Étudier la nature des intégrales généralisées et calculer leur valeur en cas de convergence.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$$

Exercice 13. Intégrales de Riemann ♡ [Corrigé] ★☆☆

Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

On découpera astucieusement l'intervalle $[0,+\infty[$.

Exercice 15. Intégration par parties [Corrigé] ★★☆

Étudier la nature des intégrales généralisées ci-dessous puis, en cas de convergence, calculer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16. Changement de variables [Corrigé] ★★★

À l'aide d'un changement de variable, étudier la convergence des intégrales ci-dessous, puis, en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

Problèmes

Exercice 17. Fonction Gamma

[Corrigé] ★★☆

Pour tout $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$.
   On pourra calculer $\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}}$.
2. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 18.

[Corrigé] ★★★

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t.$$

1. À l'aide de $\lim_{t \to +\infty} te^{-t}$, montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant te^{-t} \leqslant 1$.
2. En déduire que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.
3. Établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
4. À l'aide d'un encadrement, montrer que :
   $$\lim_{x \to +\infty} xF(x) = 0.$$
5. Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1], \; 0 \leqslant xF(x) \leqslant -x \ln x + xF(1).$$
   En déduire la valeur de $\lim_{x \to 0^+} xF(x)$.
6. Sans déterminer une expression de $F(x)$ en fonction de $x > 0$, montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} F(x) \, \mathrm{d}x$ converge.

Exercice 19. Comparaison aux intégrales de Riemann

[Corrigé] ★★★

1. Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
   1. On suppose qu'il existe $\gamma > 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\gamma f(t) = 0$.
      Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge.
   2. On suppose qu'il existe $\gamma \leqslant 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\gamma f(t) = +\infty$.
      Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ diverge.
2. **Convergence des intégrales de Bertrand** $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.
   a. Montrer que $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$.
   b. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale généralisée $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t (\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Exercice 20. (hors-programme)

[Corrigé] ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = F(x^2) - F(2x),\ g_2(x) = x\left(F(x) - F(0)\right).$$

La fonction $t \mapsto x + t$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient, via le changement de variable $u = x + t$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u = F(2x) - F(x).$$

La fonction F étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) &= 2xf(x^2) - 2f(2x),\\ g_2(x) &= xf(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\\ g_3(x) &= 2f(2x) - f(x).\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

1. Soit G une primitive de $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

   Pour tout $x \neq 0$, x et $2x$ sont de même signe donc 0 n'est pas compris entre x et $2x$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = G(2x) - G(x).$$

   Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on trouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables.

2. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, $e^x \leqslant e^t \leqslant e^{2x}$. Ainsi :
   $$\forall t \in [x, 2x],\ \frac{e^x}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2x}}{t}.$$

   Par croissance de l'intégrale sur un segment (les fonctions en jeu sont continues sur $[x, 2x]$), on trouve :
   $$\forall x > 0,\ e^x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant e^{2x} \ln 2.$$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 2$ par passage à la limite.

   Un raisonnement analogue montrerait que $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \ln 2$.

   On en déduit donc que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 2$.

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   $$\forall x \neq 0,\ G(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(x) - F(0)}{x} + \frac{F(0) - F(-x)}{x}\right]. \tag{1}$$

   La fonction F étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction G est bien continue sur $\mathbb{R}^*$.

   On trouve que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$ et, en posant $u : x \mapsto F(-x)$, on trouve par composition :
   $$\frac{F(0) - F(-x)}{x} = \frac{u(0) - u(x)}{x} = -\frac{u(x) - u(0)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -u'(0) = F'(0) = f(0).$$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_0 F = f(0)$.

   La fonction G est donc prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $G(0) = f(0)$.

2. La fonction F étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on tire de l'égalité (1) la dérivabilité de G sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables et :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = -\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(x) + f(-x)}{2x}.$$

   Les fonctions $(t \mapsto t)$ et f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on trouve par intégration par parties
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x tf'(t).$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}.$$

   Puisque la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on reconnait une somme de Riemann et :
   $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}.$$

Puisque la fonction f est continue sur $[0,1]$, on reconnait une somme de Riemann et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2t}}.$$

Puisque la fonction f est continue sur $[0,1]$, on reconnait une somme de Riemann et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t}} = \left[\sqrt{1+t}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1.$$

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right) = n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

où $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On reconnait une somme de Riemann d'une fonction continue sur $[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3},$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{\frac{2}{3}}.$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left[\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right] &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).
\end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Puisque la fonction f est continue sur $[0,1]$, on reconnait une somme de Riemann et :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}.$$

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

Le principe est d'approcher $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)$ puisque, après le changement de variable $t = a+(b-a)x$ (la fonction $x \mapsto a+(b-a)x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$), on trouve :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{t=a+(b-a)x}{=} (b-a)\int_0^1 f\left(a+(b-a)x\right)\mathrm{d}x.$$

```python
def methode_rectangles(f, a, b, n):
    somme = 0
    for k in range(n):
        somme += f(a+ (b-a)*k/n)
    return somme*(b-a)/n
```

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. La fonction $\left(t \mapsto \ln(1+t^2)\right)$ est continue sur $[0,1]$, ce qui justifie l'existence de I_1.

   Les fonctions $(t \mapsto t)$ et $\left(t \mapsto \ln(1+t^2)\right)$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on intègre I_1 par parties :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t &= \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. La fonction arctan est continue sur $[0,1]$, ce qui justifie l'existence de I_2.

   Les fonctions $(t \mapsto t)$ et arctan étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on intègre I_2 par parties :

$$I_2 = \int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t = \Big[t\arctan t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

3. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\sin t}{3+\cos^2 t}\right)$ est continue sur $[0,\pi]$, ce qui justifie l'existence de I_3.

   La fonction cos étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on réalise le changement de variable $x = \cos t$. On a alors $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$ et :

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $(t \mapsto t^n \ln t)$ est continue sur $[1,e]$, ce qui justifie l'existence de I_4. Les fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right)$ et ln étant $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$, on intègre I_1 par parties :

$$\begin{aligned} I_4 = \int_1^e t^n \ln t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_1^e - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

5. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\right)$ est continue sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, ce qui justifie l'existence de I_5. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t}\right)$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, on réalise le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$. On a alors $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et :

$$\begin{aligned} I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[(1+x)\ln(1+x) - x\Big]_1^2 \\ &= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

6. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+2t}\right)$ est continue sur $[1,2]$, ce qui justifie l'existence de I_6. La fonction $\left(t \mapsto \sqrt{t}\right)$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$, on réalise le changement de variable $x = \sqrt{t}$. On a alors $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$ et :

$$I_6 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3.$$

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\left(t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}\right)$ est continue sur $[0,1]$ (car polynômiale), ce qui justifie l'existence de l'intégrale du premier membre de l'égalité à prouver.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^n \left(-t^2\right)^k\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} \quad \text{car } -t^2 \neq 1 \\ &= \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale (les fonctions en jeu sont bien continues sur $[0,1]$), on trouve l'égalité recherchée :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$.

   Par croissance de l'intégrale (les fonctions intégrées sont continues sur $[0,1]$), on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t.$$

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   D'après l'égalité de la première question et la linéarité de l'intégrale (les fonctions intégrées sont continues sur $[0,1]$), on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

   On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

   On en déduit donc que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1. On trouve sans difficulté que $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que les fonctions $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}\right)$ et $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1+x^{n+1}}\right)$ sont continues sur $[0,1]$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\,\mathrm{d}x.$$

   Or :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geqslant 0 \text{ et } \forall x \in]0,1[,\ \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} > 0.$$

   Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\,\mathrm{d}x > 0,$$

   On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

   Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$, i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Les fonctions $\left(x \mapsto \dfrac{1}{n}\ln(1+x^n)\right)$ et $(x \mapsto x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

5. On sait déjà que, pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \geqslant 0$.

Étudions la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leqslant 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $g(0) = 0$, la fonction g est négative sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que : $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $x^n \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$. Par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0.$$

6. D'après la question 4, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

Le résultat de la question précédente assure que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} o(1).$$

On en déduit le développement asymptotique recherché :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que la fonction $\sin^n$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $\left(t \mapsto \frac{\pi}{2} - t\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc poser $x = \frac{\pi}{2} - t$. On a alors $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$ et :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \cos^n(x) \geqslant 0 \text{ et } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos^n(x) > 0,$$

la positivité de l'intégrale assure que $I_n > 0$.

2. Remarquons que :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(1-\sin^2(t))\,\mathrm{d}t = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\left[\sin(t)\cos^n(t)\right]\mathrm{d}t.$$

Intégrons la seconde intégrale par parties, les fonctions sin et $\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\left[\sin(t)\cos^n(t)\right]\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{n+1}\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1} I_{n+2}.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$, i.e $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \quad \text{et} \quad I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1}.$$

Un raisonnement par récurrence montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = I_0 \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = I_1 \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1) I_n I_{n+1}$. D'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+2) I_{n+1} I_{n+2} = (n+1) I_n I_{n+1} = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, égale à $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Montrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,(\sin(t) - 1)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, $\sin^n(t)\,(\sin(t)-1) \leqslant 0$. Par positivité (ou croissance) de l'intégrale, on trouve que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et ainsi que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{\pi}{2} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} \leqslant (n+2)I_{n+1}^2 \leqslant (n+2)I_nI_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}\frac{\pi}{2}.$$

Puisque les membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{\pi}{2}$, on trouve que $\lim_{n\to+\infty}(n+2)I_{n+1}^2 = \frac{\pi}{2}$, puis $\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n^2 = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que :

$$I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} \quad \text{puis} \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

1. La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,1]$. Soit $A \in]0,1]$.

$$\int_A^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_A^1 = \frac{1}{A} - 1 \underset{A\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ diverge.

2. La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ est continue sur $]0,1]$. Soit $A \in]0,1]$.

$$\int_A^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_A^1 = 1 - \sqrt{A} \underset{A\to0^+}{\longrightarrow} 1$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 1$.

3. La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t\ln t}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$. Soit $A \in]1,2]$.

$$\int_A^2 \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_A^2 = \ln|\ln 2| - \ln|\ln A| \underset{A\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit que l'intégrale $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ diverge donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ diverge aussi.

4. La fonction $\left(t \mapsto \frac{\ln t}{t}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $A \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^A = \frac{1}{2}\ln^2 A \underset{A\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

5. La fonction $\left(t \mapsto e^{-2|t|+t}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Étudions alors la convergence des intégrales $\int_{-\infty}^0 e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t$. Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-2|t|+t} = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ e^{3t} & \text{si } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Pour $A > 0$, on a $\int_0^A e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Pour $B < 0$, on a $\int_B^0 e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t = \int_B^0 e^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(1 - e^{3B}\right) \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$

On en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^0 e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|+t}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

6. La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+2)}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} &= \int_0^A \frac{(t+2)-(t+1)}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^A \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^A \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(A+1) - \ln(A+2) + \ln 2 \\ &= \ln\left(\frac{A+1}{A+2}\right) + \ln 2 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.\end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = \ln 2.$$

Corrigé de l'exercice 13. [Énoncé]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit $A \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^A & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \Big[\ln t\Big]_1^A & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{A^{\alpha-1}} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln A & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Soit $\varepsilon \in]0,1]$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_\varepsilon^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \Big[\ln t\Big]_\varepsilon^1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln \varepsilon & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Corrigé de l'exercice 14. [Énoncé]

La fonction sin est continue sur $[0,+\infty[$. L'idée est de découper l'intervalle $[0,+\infty[$ de manière à pouvoir faire "sauter" la valeur absolue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2n\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin t\,\mathrm{d}t + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{(par } 2\pi\text{-périodicité de sin)} \\
&= 4n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n\pi = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

Corrigé de l'exercice 15. [Énoncé]

1. Les fonctions $(t \mapsto t)$ et ln sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Remarquons que $\displaystyle\lim_{t\to0} t\ln t = 0$par croissances comparées. Le théorème d'intégration par parties assure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t$, qui converge trivialement. Ainsi la première intégrale converge et :
$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}t = -1.$$

2. La fonction $\left(t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les fonctions $(t \mapsto t)$ et $\left(t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\right)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Remarquons que $t\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$ et :
$$t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = t\ln(1+t) - t\ln t \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(croissances comparées)}$$
Le théorème d'intégration par parties assure que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ sont de même nature. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ diverge (on peut s'en

convaincre en posant le changement de variable $x = t+1$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ diverge aussi.

3. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,1[$.

   Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Les fonctions $\left(t \mapsto -\dfrac{1}{t}\right)$ et $\left(t \mapsto \ln\left(1-t^2\right)\right)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\varepsilon]$.

   Puisque $-\dfrac{\ln(1-t^2)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{t^2}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, $\lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{\ln(1-t^2)}{t} = 0$. Le théorème d'intégration par parties[1] assure que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$ sont de même nature.

   Puisque la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}\right)$ est continue sur $[0,\varepsilon]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$ est convergente donc $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

   On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t}\right]_0^{\varepsilon} - \int_0^{\varepsilon} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} \\
&= -\frac{\ln(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \int_0^{\varepsilon} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} \\
&= -\frac{\ln(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t-1}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \ln(1+\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon) \\
&= -\ln(1+\varepsilon)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ln(1-\varepsilon) \\
&\underset{\varepsilon\to 1}{\longrightarrow} -2\ln 2 \qquad \text{par croissances comparées.}
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 1} \int_0^{\varepsilon} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln 2.$$

4. La fonction $(t \mapsto e^{-t}\cos t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left|e^{-t}\cos t\right| \leqslant e^{-t}.$$

   Puisque l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$ converge absolument par comparaison de fonctions positives, donc converge.

   Les fonctions $(t \mapsto e^{-t})$ et sin sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant |e^{-t}\sin t| \leqslant e^{-t}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}\sin t = 0$. On a, par intégration par parties (ce résultat garantit la convergence de la seconde intégrale) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \left[e^{-t}\sin t\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t. = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t.$$

   Les fonctions $(t \mapsto e^{-t})$ et $-\cos$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} -e^{-t}\cos t = 0$, le théorème d'intégration par parties assure que (remarquons que toutes les intégrales convergent d'après ce qui précède) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t &= \left[-e^{-t}\cos t\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

   On en déduit alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 16. [Énoncé]

1. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   La fonction exp est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\exp(\mathbb{R}_+) = [1,+\infty[$. Posons $u = e^t$. On a alors $\mathrm{d}u = e^t\,\mathrm{d}t$. Sous réserve de convergence, on a, par changement de variable :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=e^t}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}.$$

[1] Une intégration par parties sur $]0,1[$ n'était pas possible car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$ diverge.

Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = \left[-\frac{1}{u+1}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}$ converge. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ converge donc par changement de variables et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} = \frac{1}{2}.$$

2. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$.

   Posons $x = \sqrt{t}$. On a alors $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$. Sous réserve de convergence, on a, par changement de variable :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2e^{-\sqrt{t}} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \underset{x=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

   Puisque l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge par changement de variables et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2.$$

3. La fonction $(t \mapsto \sin t \ln(\sin t))$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   La fonction cos est $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) =]0, 1]$.

   Posons $x = \cos t$. On a alors $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$. Sous réserve de convergence, on a, par changement de variable :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln\left(\sqrt{1-\cos^2 t}\right)(-\sin t)\,\mathrm{d}t \underset{x=\cos t}{=} \int_0^1 \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

   La fonction $\left(x \mapsto \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)$ est continue sur $[0, 1[$. Soit $A \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned}\int_0^A \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^A [\ln(1-x) + \ln(1+x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[-(1-x)\ln(1-x) - x + (1+x)\ln(1+x) - x\Big]_0^A \\ &= \frac{1}{2}\Big[-(1-A)\ln(1-A) - A + (1+A)\ln(1+A) - A\Big]_0^A \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 - 1 \quad \text{(par croissances comparées).}\end{aligned}$$

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$ converge, donc, par changement de variables, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 1.$$

4. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\right)$ est continue sur $]0, 1[$.

   La fonction $u : t \mapsto \sqrt{1-t}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$ et $u(]0, 1[) =]0, 1[$.

   Posons $x = \sqrt{1-t}$. On a alors $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t}}$. Sous réserve de convergence, on a, par changement de variable :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -2\ln t\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)\mathrm{d}t \underset{x=\sqrt{1-t}}{=} \int_0^1 2\ln(1-u^2).$$

   On sait d'après la question précédente que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$ converge (et vaut $2(\ln 2 - 1)$), donc, par changement de variables, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ converge aussi et :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 4\ln 2 - 4.$$

Corrigé de l'exercice 17. [Énoncé]

1. On commence par remarquer que, pour tout $t > 0$, $t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{2}} \geqslant 0$.
   De plus $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$ par croissances comparées. Il existe donc un réel $A > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant 1$, $t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$. On en déduit que, pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$.

2. Soit $\alpha > 0$. La fonction $f : t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Fixons $A > 0$.

   - Étudions l'existence de l'intégrale de f sur $]0, A]$.
   $$\forall t \in]0, A],\ 0 \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t} \leqslant \frac{1}{t^{1-\alpha}}.$$
   Puisque $1-\alpha < 1$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}}$ converge (à démontrer - cf exercice 13) donc $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}}$ aussi. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
   - Étudions l'existence de l'intégrale de f sur $[A, +\infty[$. D'après la question précédente, on trouve que :
   $$\forall t \geqslant A,\ 0 \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t} \leqslant e^{-\frac{t}{2}}.$$
   Puisque l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge, on peut montrer par le changement de variable $x = \dfrac{t}{2}$ que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge, et enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

3. Soit α un réel strictement positif. Les fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{\alpha}\right)$ et $(t \mapsto e^{-t})$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Puisque $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^\alpha}{\alpha}e^{-t} = 0$. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{\alpha}e^{-t} = 0$.

   Le théorème d'intégration par parties assure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et :
   $$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   On trouve alors que :
   $$\forall \alpha > 0,\ \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1) \quad \text{i.e.} \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

4. Puisque $\Gamma(1) = 1 = 0!$, un raisonnement par récurrence montre que, pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Corrigé de l'exercice 18. [Énoncé]

1. On commence par remarquer que, pour tout $t > 0$, $te^{-t} \geqslant 0$.

   De plus $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$ par croissances comparées. Il existe donc un réel $A > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, $te^{-t} \leqslant 1$. On en déduit que, pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant te^{-t} \leqslant 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc sur $[x, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

   Puisque l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge aussi. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par continuité de g sur $]0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $x > 0$, i.e. $F(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.

3. D'après la relation de Chasles, on a :
   $$\forall x > 0,\ F(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = F(1) - \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Puisque g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, g admet une primitive G sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :
   $$\forall x > 0,\ F(x) = F(1) - G(x) + G(1).$$
   Puisque G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, F l'est aussi par théorèmes opératoires et :
   $$\forall x > 0,\ F'(x) = -G'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que
   $$xF(x) = \int_x^{+\infty} \frac{x}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \geqslant x$, $0 \leqslant \frac{x}{t}e^{-t} \leqslant e^{-t}$. Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale de référence $\int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge aussi. Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$0 \leqslant xF(x) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$ (convergence vers 0 du reste d'une intégrale généralisée), le théorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

Soit $x \in]0,1]$. La relation de Chasles permet aussi d'écrire :

$$xF(x) = x\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}e^{-t} + x\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}e^{-t} = x\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}e^{-t} + xF(1).$$

Pour tout $t \in [x,1]$, $\frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{1}{t}$. Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}e^{-t} \leqslant \int_x^1 \frac{1}{t} = -\ln x.$$

On en déduit que : $\forall x \in]0,1]$, $0 \leqslant xF(x) \leqslant -x\ln x + xF(1)$. Les croissances comparées et le théorème d'encadrement permettent de conclure : $\lim\limits_{x\to 0} xF(x) = 0$.

5. Les fonctions $(x \mapsto 1)$ et F étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} xF(x) = 0$, le théorème d'intégration par parties assure alors que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

sont de même nature. Or :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ xf(x) = e^{-x}.$$

L'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ étant convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi convergente.

Corrigé de l'exercice 19. [Énoncé]

1. a. Par définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant A$, $t^\gamma f(t) \leqslant 1$. Ainsi :

$$\forall t \geqslant A,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^\gamma}.$$

Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ converge ($\gamma \geqslant 1$), l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ converge et, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

On en déduit que l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Par définition de la limite, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant B$, $t^\gamma f(t) \leqslant 1$. Ainsi :

$$\forall t \geqslant B,\ f(t) \geqslant \frac{1}{t^\gamma}.$$

Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ diverge ($\gamma \leqslant 1$), l'intégrale $\int_B^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ diverge et, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_B^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

On en déduit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. a. Puisque la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue positive sur $[e,+\infty[$, on peut appliquer les résultats des questions précédentes.

- Si $\alpha > 1$, considérons un réel $\gamma \in]1,\alpha[$.

$$\forall t > 0,\ t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta}.$$

Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = 0$, le résultat de la question 1.a assure alors que $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge.

- Si $\alpha < 1$, considérons un réel $\gamma \in]\alpha,1[$.

$$\forall t > 0,\ t^\gamma f(t) = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^\beta}.$$

Par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = +\infty$. Le résultat de la question 1.b assure alors que $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ diverge.

b. La fonction ln est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[e, +\infty[$. Posons $x = \ln t$. On a alors $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. Le théorème de changement de variable assure alors que les intégrales :

$$\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta}$$

sont de même nature. Puisque l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Corrigé de l'exercice 20. [Énoncé]

1. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet donc une limite en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

   - Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, il existe $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant -1$, et donc $|f(x)| \geqslant 1$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverge aussi par comparaison de fonction positives, ce qui est absurde.
   - Posons $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

     Si $\ell \neq 0$, il existe $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $f(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ si $\ell > 0$ et $f(x) \leqslant -\dfrac{\ell}{2}$ si $\ell > 0$. Ainsi :

     $$\forall x \geqslant A,\ |f(x)| \geqslant \frac{l}{2}$$

     Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ell}{2}\,\mathrm{d}x$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverge aussi par comparaison de fonction positives, ce qui est absurde.
     On en déduit donc que f tend vers 0 en $+\infty$.

2. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 en $+\infty$, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.
   Soit $x > 0$. Puisque la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

   $$\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right],\ f(t) \geqslant f(x) \geqslant 0.$$

   Par croissance de l'intégrale, on a :

   $$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{x}{2} f(x) \geqslant 0.$$

   Puisque :

   $$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   la convergence du reste d'une intégrale convergence assure que :

   $$\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

   On en déduit alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0$ par encadrement.