Exercice 1

1.
```
SELECT DISTINCT nom, prenom, num
FROM etudiant AS e
JOIN inscription AS i ON e.num = i.numEtudiant
WHERE semestre = 4
```

2.
```
SELECT numUE, intitule, COUNT(numEtudiant) AS nbEtudiants
FROM cours AS c
JOIN inscription AS i ON c.numUE = i.numUE
GROUP BY numUE
```

3. ## Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilisons la propriété d'invariance du rang d'une matrice par transposition :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A) &\Leftrightarrow A-\lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(A-\lambda I_n)\neq n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\left(A^T-\lambda I_n\right)\neq n \text{ car } \mathrm{rg}\,(A-\lambda I_n)=\mathrm{rg}\left([A-\lambda I_n]^T\right)=\mathrm{rg}\left(A^T-\lambda I_n\right)\\ &\Leftrightarrow \lambda\in \mathrm{Sp}\left(A^T\right).\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}\left(A^T\right).}$

Exercice 3

La fonction ln est continue sur $]0;1]$. Soit $A\in]0;1]$. Par croissances comparées, on trouve :

$$\int_A^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t=[t\ln t-t]_A^1=-1-A\ln A+A \underset{A\to 0}{\to} -1.$$

On en déduit que <u>l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.</u>

Remarquons que la fonction $(t\mapsto \ln(t)e^{-t})$ est continue sur $]0;1]$.
Pour tout $t\in]0;1]$, $0<e^{-t}\leqslant 1$ et $-\ln(t)\geqslant 0$ donc $0\leqslant -\ln(t)e^{-t}\leqslant -\ln(t)$. Par linéarité, l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison de fonctions positives puis que <u>$\int_0^1 \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge par linéarité.</u>

Exercice 4

1. On trouve immédiatement que $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}$. Puisque $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left([X+Y=n]\cap[X=k]\right) \text{ (la série converge par } \sigma\text{-addivité)}\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left([Y=n-k]\cap[X=k]\right)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left([Y=n-k]\cap[X=k]\right) \quad (\forall k>n,\ [Y=n-k]=\emptyset)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}\\ &=\frac{1}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k}\\ &=\frac{1}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}\\ &=\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)} \text{ d'après la formule du binôme de Newton.}\end{aligned}$$

On en déduit que <u>$X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$</u>.

2. On conjecture que $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$. Montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

La propriété est triviale pour $n=1$: X_1 suit la loi de Poisson de paramètre λ_1.

Supposons le résultat vrai pour un entier $n\in\mathbb{N}^*$. Notons $X=X_1+\cdots+X_n$ et $Y=X_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ et Y celle de paramètre $\mu=\lambda_{n+1}$. Puisque les variables aléatoires $X_1,\dots,X_{n+1}$ sont indépendantes, les variables aléatoires X et Y le sont aussi en vertu du lemme des coalitions. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$, i.e. $X_1+\cdots+X_{n+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}$, ce qui conclut la récurrence.

On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, <u>la variable aléatoire $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$</u>.

Exercice 5

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{rg}(A(0)-\lambda I_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Puisque $1+\lambda^2 \neq 0$, on trouve que

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A(0)) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A(0)-\lambda I_4) \neq 4 \Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \text{ ou } -1-\lambda = 0.$$

Les seules valeurs propres de $A(0)$ sont donc 1 et -1.

$$X \in \operatorname{Ker}(A(0)-I_4) \Leftrightarrow \begin{cases} -2y+t=0 \\ -2y+z=0 \\ -z+t=0 \\ 2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=z=t=0$$

$$X \in \operatorname{Ker}(A(0)+I_4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+t=0 \\ z=0 \\ -z+t=0 \\ 2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=t=0 \end{cases}$$

On en déduit que les espaces propres de $A(0)$ sont :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A(0)-I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } \operatorname{Ker}(A(0)+I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right).}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{rg}(A(a)-\lambda I_4)$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & a-2 & a & 1 \\ a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & 0 & -\lambda-a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 1-\lambda & a-2 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-a & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{matrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a \\ 0 & a^2-2a+1-\lambda^2 & a^2-1+\lambda & a\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2+a\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow aL_2-(1-\lambda)L_1 \ (a\neq 0) \\ \\ L_4 \leftarrow L_4-(\lambda+a)L_3 \end{matrix}$$

On en déduit que λ est valeur propre de $A(a)$ si, et seulement si

$$\operatorname{rg}(A(a)-\lambda I_4) \neq 4 \Leftrightarrow \lambda^2 = a^2-2a+1 \text{ ou } 1+\lambda^2+a\lambda = 0.$$

Les valeurs propres de A sont donc les réels λ solutions de l'une des deux équations :

$$\boxed{\lambda^2 = (a-1)^2 \text{ ou } \lambda^2+a\lambda+1=0.}$$

3. a. La matrice $A(a)$ n'est pas inversible si, et seulement si, 0 est valeur propre de $A(a)$. Le réel 0 n'est pas solution de l'équation $\lambda^2+a\lambda+1=0$; il est solution de $\lambda^2=(a-1)^2$ si et seulement si $a=1$.
On en déduit que $a=1$ est la seule valeur pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.

b. D'après ce qui précède, si λ est une valeur propre non nulle de $A(1)$ alors λ vérifie l'équation $\lambda^2+\lambda+1=0$, qui n'admet pas de solution réelle (discriminant égal à -3). On en déduit que $A(1)$ n'admet pas d'autre valeur propre réelle autre que 0. Si $A(1)$ était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A = P0_4P^{-1} = 0_4$, ce qui est absurde. On en déduit que $A(1)$ n'est pas diagonalisable.

4. a. Puisque $a^2-4>0$, la seconde équation $\lambda^2+a\lambda+1=0$ admet deux solutions distinctes. La première équation $\lambda^2=(a-1)^2$ admet deux solutions distinctes $a-1$ et $1-a$. Il suffit de vérifier que $a-1$ et $1-a$ ne sont pas solutions de la seconde équation pour justifier que $A(a)$ admet quatre valeurs propres distinctes. Or :
   - $(1-a)^2+a(1-a)+1 = -a+2 \neq 0$
   - $(a-1)^2+a(a-1)+1 = 2a^2-3a+2$; le discriminant de ce polynôme en a étant strictement négatif, il ne s'annule pour aucune valeur de a.

Ainsi, aucune des deux valeurs $a-1$ et $1-a$ (qui sont distinctes car $a \neq 1$) n'est égale à une solution de l'équation $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$.
On en déduit que $A(a)$ possède quatre valeurs propres deux-à-deux distinctes.

b. Puisque la matrice $A(a)$ appartient à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et admet quatre valeurs propres distinctes, la matrice $A(a)$ est diagonalisable.

Exercice 6

1. Il est inutile de stocker tous les numéros de boules, il suffit de ne retenir que le plus grand numéro parmi les boules encore présentes dans l'urne.

```
import random as rd

def simuleX(n):
    boule_tiree = rd.randint(1,n)
    nb_tirages = 1
    while boule_tiree > 1:
        boule_tiree = rd.randint(1,boule_tiree-1)
        nb_tirages += 1
    return nb_tirages
```

2. On trouve immédiatement que $X_2(\Omega) = \{1;2\}$. En effet, on peut vider l'urne en un seul tirage (si on obtient la boule numérotée 1 au premier tirage) ou en deux (si on obtient la boule numérotée 2 au premier tirage, on tire nécessairement la boule numérotée 1 au second).
Par équiprobabilité des numéros de boules au premier tirage, on trouve que :
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}.$$
La variable aléatoire X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1;2]\!]$. Puisqu'elle est finie, elle admet espérance et variance. D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}.}$
On pourrait calculer $\mathbb{V}(X_2)$ en utilisant la formule de König-Huygens et le théorème du transfert (pour calculer $\mathbb{E}\left(X_2^2\right)$ mais on présente ici une idée élégante. Remarquons que $X_2 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. En utilisant l'invariance de la variance par translation, on trouve que :
$$\boxed{\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(X_2 - 1) = \frac{1}{4}.}$$
On trouve de la même manière que $X_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$ et $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$. En utilisant la formule des probabilités composées, on trouve que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = 3) &= \mathbb{P}\left([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]\right)\\ &= \mathbb{P}(N_1 = 3)\, \mathbb{P}_{[N_1=3]}(N_2 = 2)\, \mathbb{P}_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3 = 1)\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$
Par complémentarité, on trouve que : $\mathbb{P}(X_3 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 1) - \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{2}$.
La loi de X_3 est donc donnée par :
$$\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{6}.}$$
La variable aléatoire X_3 étant finie, elle admet une espérance, égale à :
$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \mathbb{P}(X_3 = 1) + 2\,\mathbb{P}(X_3 = 2) + 3\,\mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{11}{6}.}$$

3. On trouve par le même raisonnement que : $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$
On trouve immédiatement par équiprobabilités des boules tirées au premier tirage que :
$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \frac{1}{n}.}$$
Remarquons que vider l'urne en n tirages revient à avoir tiré chacun des numéros, et plus précisément :
$$[X_n = n] = [N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \cdots \cap [N_{n-1} = 2] \cap [N_n = 1].$$
En utilisant la formule des probabilités composées, on trouve que :
$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{n!}.}$$

4. Soit $k \geqslant 2$. Puisque $([N_1 = i])_{1 \leqslant n}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(N_1 = i)\,\mathbb{P}_{N_1=i}(X_n = k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}_{N_1=i}(X_n = k) \text{ car } N_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Sachant qu'on a obtenu la boule numéroté i au premier tirage, vider une urne de n boules en k tirages revient à vider une urne de $i-1$ boules en $k-1$ tirages. Ainsi : $\mathbb{P}_{N_1=i}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)$. On en déduit alors que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1).}$$

5. Les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont finies, elles admettent donc une espérance. Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{n+1}\sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \text{ (d'après 6)} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=2}^{n+1}\sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (j+1)\,\mathbb{P}(X_i = j) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} j\,\mathbb{P}(X_i = j) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = j)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} [\mathbb{E}(X_i) + 1] \text{ car } X_i(\Omega) \subset [\![1,n]\!] \\ &= 1 + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) - (n+1) \text{ et } \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) = n\,\mathbb{E}(X_n) - n.$$

Par soustraction, on trouve que $\mathbb{E}(X_n) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\,\mathbb{E}(X_n) - 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}.}$$

6. En reconnaissant une somme télescopique, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)] = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1),$$

et ainsi que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)] = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Puisque la variable aléatoire X_1 est constante égale à 1, $\mathbb{E}(X_1) = 1$ et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.}$$

7. a. Soit $k \geqslant 2$. Puisque

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

(la fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$ étant décroissante sur $[k, k+1]$), on trouve par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \left[\frac{t}{k}\right]_{k}^{k+1} = \frac{1}{k}.$$

On trouve de la même manière que :

$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

par décroissance de la fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$ sur $[k-1, k]$). Ainsi :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.}$$

b. En sommant l'encadrement précédent pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on trouve que :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

La relation de Chasles assure que :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

c'est-à-dire :

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n).$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\ln n} = 1$ et :

$$\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln n} = \frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] - \ln 2 + 1}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 2 + 1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc d'après le théorème d'encadrement de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

c. On trouve immédiatement que : $\boxed{\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

8. Les variables aléatoires X_{n+1} et X_n sont finies donc elles admettent un moment d'ordre

2. D'après le théorème du transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2\, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2\, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k^2}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \text{ (d'après 6)} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k^2\, \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (j+1)^2\, \mathbb{P}(X_i = j) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} j^2\, \mathbb{P}(X_i = j) + 2\sum_{j=1}^{n} j\, \mathbb{P}(X_i = j) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = j)\right] \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(X_i\right) + 1\right] \text{ car } X_i(\Omega) \subset [\![1, n]\!] \\
&= 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(X_i\right)\right].
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(X_i\right)\right] = (n+1)\,\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) - (n+1)$$

puis que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[\mathbb{E}\left(X_i^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(X_i\right)\right] = n\,\mathbb{E}\left(X_n^2\right) - n.$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve :

$$(n+1)\,\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) - n\,\mathbb{E}\left(X_n^2\right) - 1 = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(X_n\right)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) - \mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \frac{2\,\mathbb{E}\left(X_n\right) + 1}{n+1}.}$$

9. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_{n+1}) &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) - \mathbb{E}\left(X_{n+1}\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + \frac{2\,\mathbb{E}\left(X_n\right)+1}{n+1} - \left(\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}\right)^2 \quad \text{d'après 6 et 9} \\ &= \mathbb{E}\left(X_n^2\right) - \mathbb{E}(X_n)^2 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \mathbb{V}(X_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{d'après la formule de König-Huygens.}\end{aligned}$$

En reprenant le raisonnement de la question 7, on montre que :

$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, on trouve que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\ln n} = 1$.

On en déduit que : $\boxed{\mathbb{V}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

Exercice 7

1. Puisque les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que :

$$\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2.}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$$\varphi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N).$$

L'application φ_A est donc linéaire. Puisque $\varphi_A(M) = AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Supposons que A soit inversible. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$$\varphi_A(M) = N \Leftrightarrow AM = N \Leftrightarrow M = A^{-1}N.$$

Puisque l'équation $\varphi_A(M) = N$ admet une unique solution pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application φ_A est bijective. C'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la réciproque est donnée par la résolution de l'équation ci-dessus : $\boxed{\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}.}$

Réciproquement, supposons que φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_A(M) = I_n$, i.e. $AB = I_n$. On en déduit que la matrice A est inversible (d'inverse B).

Ainsi, φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si A est inversible.

4. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}5-\lambda & 3\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (5-\lambda)(3-\lambda) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 6.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{2; 6\}$. La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Soit $X = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases}3x + 3y = 0\\ x + y = 0\end{cases} \Leftrightarrow y = -x.$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(A - 2I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$$AX = 6X \Leftrightarrow \begin{cases}-x + 3y = 0\\ x - 3y = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = 3y.$$

On en déduit que : $\mathrm{Ker}(A - 6I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $A = PDP^{-1}$ où :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

b. La famille $\mathcal{B}_1$ forme la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Puisque la famille $\mathcal{B}_2$ s'obtient par permutation des matrices de $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ est aussi une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Puisque :

$$\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 5E_{1,1} + 1E_{2,1} \qquad \varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 5E_{1,2} + 1E_{2,2}$$

$$\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix} = 3E_{1,1} + 3E_{2,1} \qquad \varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix} = 3E_{1,2} + 3E_{2,2}$$

la matrice T_1 de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}_1 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est :

$$\boxed{T_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}.$$

d. D'après les calculs précédents, la matrice T_2 de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}_2 = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est :

$$\boxed{T_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \left(= \begin{pmatrix} A & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & A \end{pmatrix} \right).$$

e. Puisque les valeurs propres de l'endomorphisme φ_A sont celles de n'importe laquelle de ses matrices, déterminons les valeurs propre de $T_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi_A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(T_2 - \lambda I_4) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 3 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & P(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $P(\lambda) = Q(\lambda) = 3 - (5-\lambda)(3-\lambda) = -\lambda^2 + 8\lambda - 12 = -(\lambda-2)(\lambda-6)$.

Puisque :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(T_2) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(T_2 - \lambda I_4) \neq 4 \Leftrightarrow P(\lambda) = Q(\lambda) = 0,$$

les seules valeurs propres de φ_A sont 2 et 6 (les mêmes que A !). Puisque φ_A est diagonalisable si, et seulement si, T_2 est diagonalisable, déterminons les espaces propres de T_2. Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$T_2 X = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3z + 3t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ t = -z \end{cases}$$

On en déduit l'espace propre de T_2 associé à la valeur propre 2 :

$$\mathrm{Ker}(T_2 - 2I_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

De la même manière (et en reconnaissant des calculs similaires à ceux réalisés à la question 4.a), on trouve l'espace propre de T_2 associé à la valeur propre 6 :

$$\mathrm{Ker}(T_2 - 6I_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Puisque $E_2(T_2)$ et $E_6(T_2)$ sont chacun engendrés par deux vecteurs non colinéaires, ils sont de dimension 2. Puisque la somme des dimensions des espaces propres de T_2 est égale à 4, i.e. la dimension de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, la matrice T_2 est diagonalisable.
L'endomorphisme φ_A est donc diagonalisable.

5. a. Par définition $AX = \lambda X$. Chacune des colonnes de la matrice AM est le résultat du produit matriciel AX, i.e. le vecteur colonne λX. On en déduit que : $\boxed{\varphi_A(M) = AM = \lambda M.}$ Puisque $X \neq 0$ (X est un vecteur propre de A), $M \neq 0$. On en déduit donc que M est un vecteur propre de φ_A et λ est une valeur propre de φ_A. On a donc bien montré l'inclusion $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A).}$

b. Il ne reste plus qu'à prouver que $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.
Soit λ une valeur propre de φ_A. Il existe donc une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$, i.e. $AM = \lambda M$.
Puisque M est non nulle, elle admet une colonne non nulle qu'on notera $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Cette matrice-colonne X vérifie alors $AX = \lambda X$. Puisque $X \neq 0$, le réel λ est valeur propre de A. On a ainsi montré que $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$ et ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \mathrm{Sp}(A).}$

* *
*