

Questions de cours

1. Énoncer la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme.
2. Que peut-on dire du spectre d'une matrice non inversible ?
3. Énoncer le critère d'équivalence pour les intégrales généralisées.

Exercice 1

On considère une base de données d'une école dont le schéma relationnel est donné par :

- **etudiant** (num, nom, prenom, dateNaissance, adresse, statut)
- **cours** (numUE, intitule, professeur, ECTS)
- **inscription** (numEtudiant, numUE, semestre, noteFinale)

1. Écrire en **MySQL** une requête déterminant le nom, prénom et numéro étudiant de tous les étudiants inscrits au semestre 4. *Attention, un étudiant suit généralement plusieurs cours dans un même semestre.*
2. Écrire en **MySQL** une requête déterminant, pour chaque cours (nom et intitulé), le nombre d'étudiants qui le suit.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les spectres de A et de sa transposée sont égaux.

Exercice 3

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)e^{-t} dt$.

Exercice 4

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Montrer que $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
2. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi de Poisson de paramètre λ_k . Quelle loi suit $X_1 + \dots + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$? Démontrer le résultat.

Exercice 5

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Montrer que 1 et -1 sont les seules valeurs propres réelles de $A(0)$. Déterminer les espaces propres associés.
2. On suppose désormais que $a > 0$. Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des deux équations : $\lambda^2 = (a-1)^2$ ou $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$.
3. a. Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.
b. Pour cette valeur, déterminer si $A(a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
4. On suppose dans cette question que $a > 2$.
a. Montrer que $A(a)$ possède quatre valeurs propres deux-à-deux distinctes.
b. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et on note X_n la variable aléatoire (définie sur un univers noté Ω) égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne. Pour tout entier k , on note N_k la variable aléatoire égale au numéro de la k -ème boule tirée s'il y a eu au moins k tirages, et 0 sinon.

1. Écrire en Python une fonction qui prend en argument un entier n et simule une réalisation de la variable X_n .
2. Déterminer la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance. Déterminer la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Déterminer l'univers-image de X_n puis calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
4. Montrer que : $\forall k \geq 2, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$. On pourra utiliser la variable aléatoire N_1 .
5. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n}$.
6. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous la forme d'une somme.
7. a. Prouver que, pour tout entier $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.
 b. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
 c. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) - \mathbb{E}(X_n^2) = \frac{2\mathbb{E}(X_n) + 1}{n + 1}$.
9. En déduire une expression de $\mathbb{V}(X_n)$ sous forme de somme puis un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\varphi_A(M) = AM$.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, A est inversible et déterminer dans ce cas φ_A^{-1} .
4. **Étude d'un cas particulier.** On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
 - a. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
 - b. Justifier que $\mathcal{B}_1 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ et $\mathcal{B}_2 = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ sont des bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - c. Déterminer la matrice T_1 de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}_1$.
 - d. Déterminer la matrice T_2 de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}_2$.
 - e. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ_A . Est-il diagonalisable ?
5. **Retour au cas général**
 - a. Soit $\lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à λ et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont égales à X . Calculer $\varphi_A(M)$. En déduire que $\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(\varphi_A)$.
 - b. Montrer que A et φ_A ont les mêmes valeurs propres.

* *

*