1 Généralités sur les variables aléatoires à densité

1.1 Notion de densité

1.1.1 Définitions

Définition 1

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **densité** si :

(i) $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$,

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points,

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exemple 2

La fonction f ci-dessous définie sur $\mathbb{R}$ est une densité.

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Définition 3

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_X sa fonction de répartition.
On dit que X est une **variable aléatoire à densité** s'il existe une densité $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction f_X est appelée **une densité de probabilité** de la variable aléatoire X.

Remarque 4

Une variable aléatoire à densité admet une unique fonction de répartition mais admet une infinité de densités !
En effet, si f et g sont deux fonctions égales sauf en un nombre fini de points et si f est une densité d'une variable aléatoire X, alors g est aussi une densité de X.

Théorème 5

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que f soit une densité de probabilité de X.

Démonstration admise.

1.1.2 Propriétés

Théorème 6 (*Caractérisation des variables aléatoires à densité*)

Une variable aléatoire réelle X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Dans ce cas, la fonction f_X ci-dessous définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité de la variable aléatoire X.

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } F_X \text{ est dérivable en x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration admise.

Remarque 7

Une variable aléatoire réelle discrète n'admet pas de densité.

Exemple 8

La variable aléatoire X dont la fonction de répartition F est donnée ci-dessous, est à densité.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Proposition 9

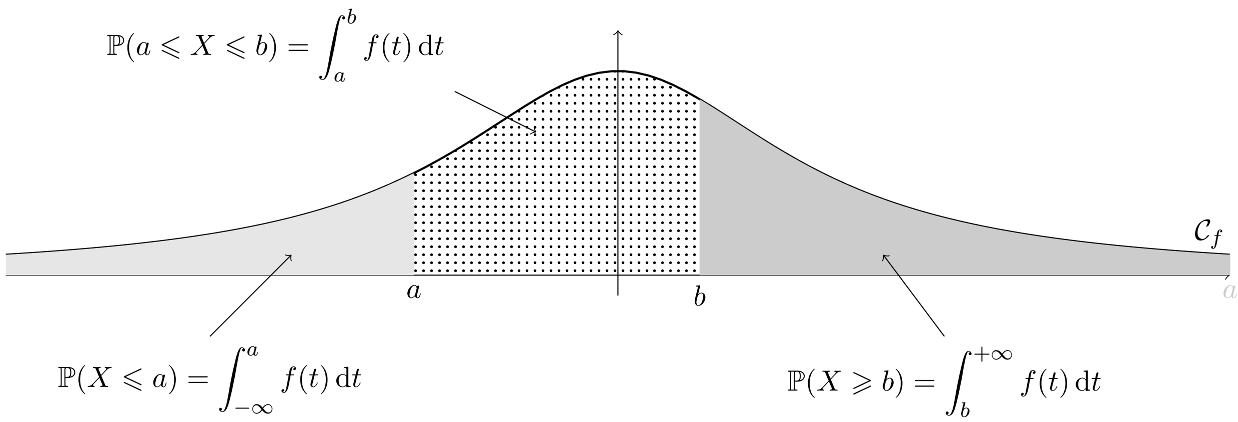
Soit X une variable aléatoire à densité. Soit f une densité de X et F la fonction de répartition de X. Alors :

(i) $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = a) = 0$,

(ii) $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$,

(iii) $\forall b \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X > b) = \mathbb{P}(X \geqslant b) = 1 - F(b) = \displaystyle\int_{b}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$,

(iv) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.



Démonstration.

Remarque 10

Contrairement aux variables aléatoires réelles discrètes, la probabilité qu'une variable aléatoire à densité prenne une valeur ponctuelle est nulle. *Donner la loi* d'une variable aléatoire à densité X ne consiste pas à calculer $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais à déterminer :

- soit **la** fonction de répartition de X,
- soit **une** densité de probabilité de X.

Définition 11

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à **support** dans un intervalle I si, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus I,\ f(x) = 0$.

Corollaire 12 (*de la proposition 9*)

Soit f une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.
Si f est à support dans un intervalle I, la variable aléatoire X est presque-sûrement à valeurs dans I : $\mathbb{P}(X \in I) = 1$.

Démonstration.

1.2 Fonction d'une variable aléatoire à densité

Exemple 13 - Loi exponentielle à partir d'une loi uniforme ♡

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et U une variable à densité, de densité donnée par la fonction $f : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$.
Montrer que $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ est une variable à densité qu'on déterminera.

1.3 Moments d'une variable aléatoire

Définition 14

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, on dit que la variable aléatoire X admet une **espérance**, et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 15

Si une variable aléatoire X admet une densité à support borné, i.e. nulle en dehors d'un segment, alors X admet une espérance.

Exemple 16

La fonction f définie ci-dessous est une densité d'une variable aléatoire X qui admet une espérance.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

La fonction f est une densité d'une variable aléatoire X qui n'admet pas d'espérance.

Théorème 18 (*Linéarité de l'espérance*)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, et λ un réel.
Si X et Y admettent une espérance, alors $\lambda X + Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration admise.

Théorème 19 (*Théorème du transfert*)

Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points. La variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)f(x)| \,\mathrm{d}x$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration admise.

Définition 20

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f et soit $r \in \mathbb{N}^*$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r f(t)| \,\mathrm{d}t$ converge, on dit que la variable aléatoire X admet un **moment** d'ordre r.

Lemme 21

Si une variable aléatoire à densité X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Démonstration.

Définition 22

Si les variables aléatoires X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admettent une espérance, on dit que la variable aléatoire X admet une **variance**, et on note $\mathbb{V}(X)$ le réel défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right].$$

Proposition 23

Si une variable aléatoire X admet une densité à support borné, i.e. nulle en dehors d'un segment, alors X admet une variance.

Démonstration admise.

Théorème 24 (*Formule de König-Huygens*)

Une variable aléatoire X admet une variance si, et seulement si X admet un moment d'ordre 2.
Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration admise.

Proposition 25

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Démonstration admise.

Définition 26

Soit X une variable aléatoire admettant une variance.
On appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Définition 27

Soit X une variable aléatoire réelle.

- Si X admet une espérance, on dit que X est **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.
- Si X admet une variance, on dit que X est **réduite** si $\sigma(X) = 1$.
- Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable aléatoire notée $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X.**

2 Lois usuelles

2.1 Lois uniformes

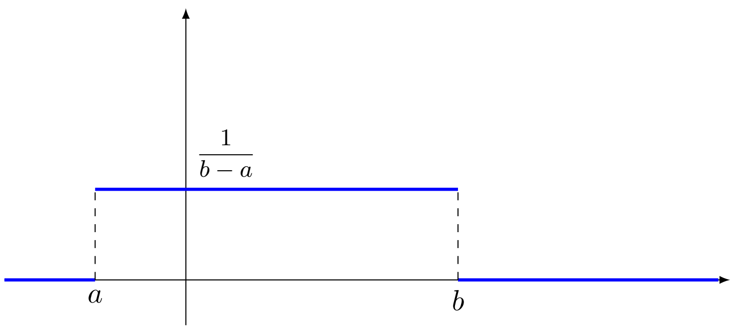
Définition 28

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$ $(a < b)$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, si la fonction

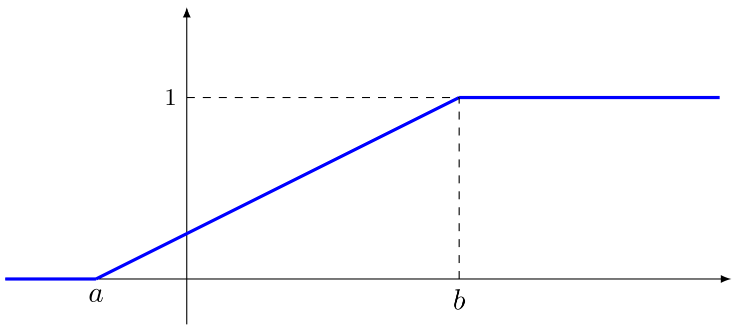
$$t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de X.

Loi uniforme sur $[a, b]$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$
Densité	$f_X : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Fonction de répartition	$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
Variance	$\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$



Densité de la loi uniforme sur $[a, b]$



Fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$

Démonstration.

Proposition 29

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et X une variable aléatoire réelle. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ si, et seulement si, $(b - a)X + a$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Démonstration.

Méthode 30. Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a,b]

Le module `random` contient un grand nombre de fonctions permettant de simuler des variables aléatoires discrètes ou continues.

- **Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur** $[0, 1[$**.**

  La fonction `random` génère un flottant pseudo-aléatoire de l'intervalle $[0, 1[$.

```python
import random as rd
x = rd.random()
```

- **Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur** $[a, b]$**.**

  À l'aide de la proposition 29, on peut écrire une fonction qui simule la loi uniforme sur $[a, b]$.

```python
def uniforme(a, b):
    return (b-a)*rd.random() + a
```

2.2 Lois exponentielles

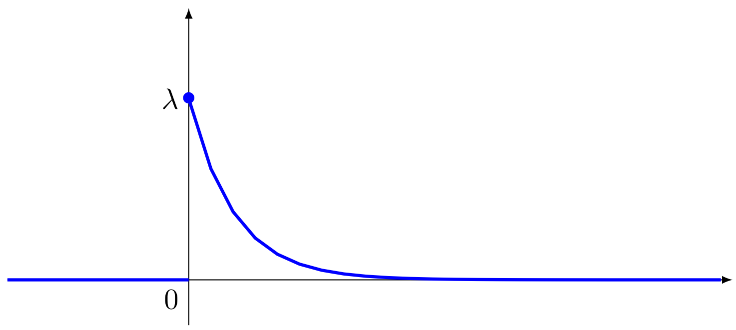
Définition 31

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si la fonction

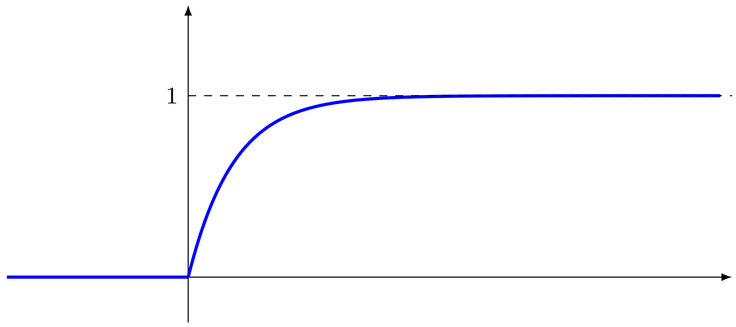
$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de X.

Loi exponentielle de paramètre λ	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$
Densité	$f_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
Fonction de répartition	$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
Variance	$\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$



Densité de la loi exponentielle de paramètre λ



Fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ

Démonstration.

Théorème 32 (***Absence de mémoire des lois exponentielles***)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. Alors :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ \mathbb{P}_{[X>s]}\left(X > s+t\right) = \mathbb{P}\left(X > t\right).$$

Démonstration.

Proposition 33 (♡)

Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0,1[$ si, et seulement si, la variable aléatoire $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.

Méthode 34. Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ

```
import numpy as np

def exponentielle(l):
    u = rd.random()
    return - np.log(1-u)/l
```

2.3 Lois normales

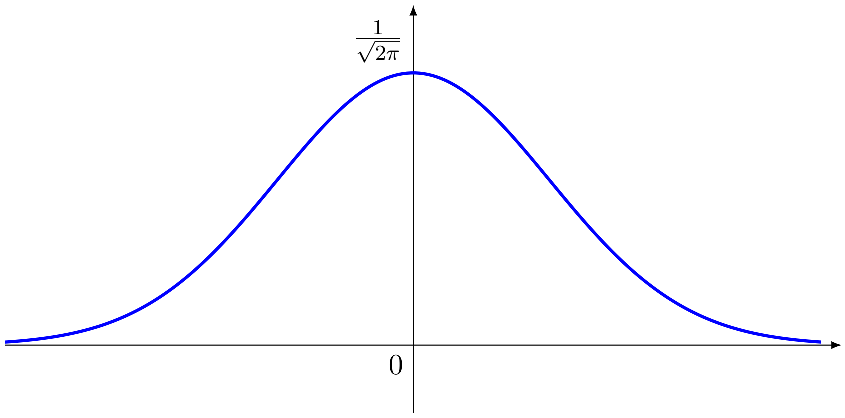
Définition 35

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ si la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

est une densité de X.

Loi normale centrée réduite	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
Densité	$f_X : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$
Fonction de répartition	$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = 0$
Variance	$\mathbb{V}(X) = 1$



Densité de la loi normale centrée réduite

Remarque 36

- On a admis dans le chapitre précédent que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.
- Cette densité n'admet pas de primitive s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles. Il n'existe donc pas d'expression de la fonction de répartition associée.

  Des tables fournissent cependant de nombreuses valeurs approchées en différents points de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Démonstration.

Proposition 37

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Alors :

(i) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Démonstration.

Définition 38

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale** de paramètres m et σ^2 où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, si la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

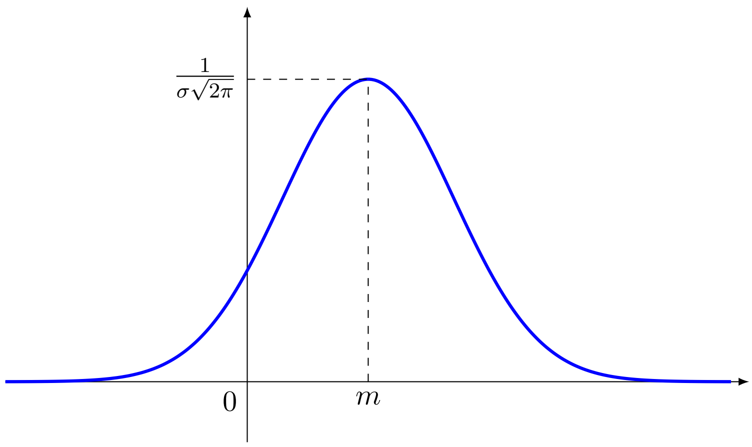
est une densité de X.

Proposition 39

Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, la variable $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite (i.e. de paramètres 0 et 1).

Démonstration admise.

Loi normale d'espérance m et de variance σ^2	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$
Densité	$f_X : t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$
Fonction de répartition	$F_X : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = m$
Variance	$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$



Densité de la loi normale de paramètres m et σ^2

Démonstration.

Proposition 40

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
Si X suit une loi normale, alors $aX + b$ suit aussi une loi normale (*dont les paramètres s'obtiennent par calcul de l'espérance et la variance*).

Démonstration admise.

Méthode 41. Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2

On utilise une primitive du module `random`.

```
import random as rd
x = rd.gauss(mu, sigma)
```

3 Indépendance de variables aléatoires

3.1 Rappels

Définition 42

On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]\right) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y).$$

Proposition 43

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.

- Si X et Y admettent une espérance, la variable aléatoire XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- Si X et Y admettent une variance, alors $X+Y$ admet une variance et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration admise.

3.2 Somme de variables aléatoires à densité indépendantes

Théorème 44

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité, de densités respectives f_X et f_Y. Alors :

(i) Pour tout $z \in \mathbb{R}$, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

convergent et ont la même valeur.

(ii) La variable aléatoire $Z = X+Y$ est une variable à densité dont une densité f_Z est donnée par la fonction :

$$f_Z : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

La fonction f_Z est appelée **produit de convolution** des fonctions f_X et f_Y.

Démonstration admise.

Exemple 45

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. La variable $Z = X+Y$ est encore une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée par la fonction :

$$z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ z & \text{si } 0 \leqslant z < 1 \\ 2-z & \text{si } 1 \leqslant z \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } z > 2. \end{cases}$$

Théorème 46

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_2, \sigma_2^2\right)$.
Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X_1 + X_2$ suit encore une loi normale : $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$.

Démonstration admise.

Corollaire 47

Soient $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_k, \sigma_k^2\right)$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right).$$

Remarque 48

On retiendra le résultat de la manière suivante : la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale. Les paramètres de cette loi (espérance et variance) s'obtiennent sans difficulté à l'aide des propriétés de l'espérance et la variance.