Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$ et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 2. [Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2.
3. Déterminer une densité de X^3.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soient $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Y = \min(X_1,\ X_2, \dots,\ X_n)$ et en donner une densité.

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale de paramètres inconnus $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type.

On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.

Exercice 5. Loi log-normale [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(\ln X)$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★☆

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

1. Montrer que la fonction F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Déterminer une densité de X.
2. Reconnaitre la loi de la variable $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

   Préciser si la variable Y admet une espérance et une variance. Les calculer le cas échéant.

Exercice 7. Loi du χ^2 [Corrigé] ★★☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. Montrer que Y admet une espérance et une variance qu'on calculera.
3. a. En posant $t = \dfrac{\lambda}{2}(1 + \sin\theta)$, montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi$.

   b. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Montrer que $U^2 + V^2$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 8. Loi de Cauchy [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer la valeur $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction $f : t \mapsto \dfrac{a}{1 + t^2}$ est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit **la loi de Cauchy**.

   a. Déterminer la fonction de répartition de X.

   b. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$, $\mathbb{P}(X \leqslant -1)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

   c. Étudier l'existence de l'espérance de X et la calculer le cas échéant.
3. Soit V une variable suivant la loi uniforme sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Montrer que $\tan V$ suit la loi de Cauchy.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité.
2. Trois personnes, qu'on notera A, B et C, arrivent devant deux guichets. La personne C laisse passer les personnes A et B, et attend que le premier guichet se libère pour passer.

   On note T_A et T_B les variables aléatoires égales aux temps de passage respectifs des personnes A et B. On suppose que T_A et T_B sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, et admettant f pour densité.

   a. La variable aléatoire T_A admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

   b. Déterminer la loi du temps d'attente U de la personne C.

   c. Quelle est la probabilité que le guichet A se libère avant le B ? Retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 10. Loi Gamma [Corrigé] ★★☆

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : z \mapsto \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}\,(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est une densité de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Soient X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1;1\}$. On suppose que X et ε sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Y = \varepsilon X$.
2. Déterminer l'espérance et la variance - si elles existent - de la variable aléatoire $Y - 2X$.

Exercice 12. Produits de convolution [Corrigé] ★★☆

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.
   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = X + Y$.
   b. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = X - Y$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

   Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2 - Y$ admet pour densité la fonction :
$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1-\sqrt{z} & \text{si } 0 < z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Soient $V_1, \dots, V_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$.
   b. Montrer que la variable aléatoire $M_n - V_{n+1}$ est à densité et déterminer une densité.
   c. En déduire $\mathbb{P}(V_{n+1} > M_n)$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★☆

Roméo et une Juliette se donnent rendez-vous à minuit (sous un balcon). L'heure d'arrivée de la Juliette suit la loi normale d'espérance minuit et d'écart-type 4 minutes. L'heure d'arrivée de Roméo suit la loi normale d'espérance minuit et cinq minutes (il a envie de se faire attendre) et d'écart-type 3 minutes. Juliette est prête à attendre au plus 10 minutes, alors que Roméo n'est prêt qu'à attendre au plus 5 minutes. Quelle est la probabilité que cette grande histoire d'amour ne commence jamais ? *On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.*

Exercice 14. Somme de lois normales indépendantes [Corrigé] ★★★

Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit encore une loi normale (dont on précisera les paramètres).

Exercice 15. Oral Agro 2008 [Corrigé] ★★★

1. Soit α un réel. Déterminer, en fonction de α, l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $x^2 + x + 1 - \alpha \leqslant 0$. Lorsque l'intervalle I des solutions est non vide, on précisera son intersection avec l'intervalle $[0,1]$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

   Déterminer la fonction de répartition de $Y = X^2 + X + 1$. En déduire une densité de Y.
3. Calculer l'espérance de Y en utilisant cette densité. Retrouver l'espérance en utilisant la définition de Y.

Exercice 16. Entropie [Corrigé] ★★★

Si une variable aléatoire X admet une densité f, on appelle entropie de X la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :
$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} -f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, *on convient que* $\ln(f(x))f(x) = 0$ *pour tout réel* x *tel que* $f(x) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.
2. Soit X une variable suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Montrer que $h(X) = \dfrac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$.
3. On souhaite prouver que, parmi toutes les variables aléatoires à densité, admettant une entropie de variance donnée σ^2, celles suivants les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On note φ une densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
   a. Soit Y une variable aléatoire d'espérance m, de variance σ^2 et de densité f telle que la fonction $x \mapsto f(x)\ln\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que :
$$h(Y) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\varphi(x)\right)\mathrm{d}x.$$
   b. En déduire que $h(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$. Conclure.