1 Montrer qu'une variable aléatoire est à densité

Pour montrer qu'une variable aléatoire Y est à densité (et déterminer sa loi), on suit les étapes ci-dessous.

(i) On commence par déterminer son univers-image $Y(\Omega)$.

(ii) On détermine sa fonction de répartition F_Y (attention : son expression sur $\mathbb{R}$ est souvent par morceaux).

Lorsque la variable aléatoire Y est de la forme $Y = \varphi(X)$, où X est une variable aléatoire à densité, on cherche souvent à exprimer la fonction de répartition de Y à l'aide de celle de X et des variations de la fonction φ.

(iii) On vérifie la régularité de F_Y, c'est-à-dire que :

- F_Y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points **à expliciter** ;
- F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$ (il suffit de le vérifier par calcul de limites sur les points où on ne sait pas si F_Y est $\mathcal{C}^1$) ;
- on détermine enfin une densité de Y en dérivant F_Y là où elle est dérivable (on peut choisir arbitrairement la valeur de cette densité sur les autres points, en nombre fini).

Exercice 1. *Montrons que la variable aléatoire $Y = X^2$ est à densité lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.*

Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on en déduit que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Pour tout $y < 0$, $P(Y \leqslant y) = 0$. Soit $y \in \mathbb{R}_+$.

$$P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = P(X \leqslant \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Or $P(X < -\sqrt{y}) = 0$ car $X \geqslant 0$ et $P(X \leqslant \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$.

Ainsi la fonction de répartition de Y est la fonction :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{y}} & \text{si } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$.

Puisque $F_Y(0) = 0$, $\lim\limits_{0^-} F_Y = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} 1 - e^{-\sqrt{y}} = 0$, i.e. $\lim\limits_{0^+} F_Y = 0$, F_Y est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que Y est à densité, et une densité est donnée par la fonction :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0. \end{cases}$$

2 Existence et calcul de l'espérance d'une variable aléatoire à densité

(i) Pour montrer qu'une variable aléatoire X de densité f **admet une espérance** on prouve la convergence l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ sans chercher à calculer sa valeur.

Cette étape est inutile si X ne prend que des valeurs positives. Dans le cas contraire, on étudiera la convergence des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$.

(ii) Pour **calculer l'espérance** d'une variable aléatoire X de densité f, on calcule la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ dont la convergence absolue vient d'être prouvée.

Une *intégration par parties* est souvent particulièrement adaptée lorsque la recherche directe de primitive échoue.

Exercice 2. *Montrons que la variable X de densité f définie ci-dessous admet une espérance et $E(X) = -2$.*

$$f : t \mapsto \begin{cases} -te^t & si\ t \leqslant 0 \\ 0 & si\ t > 0 \end{cases}$$

Puisque $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

Montrons la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t^2e^t\,\mathrm{d}t$. La fonction $(t \mapsto -t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.

En posant $u = -t$, on a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$. Sous réserve de convergence, on a par changement de variable :

$$\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t^2e^t\,\mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} -\int_{+\infty}^{0} (-u)^2e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{+\infty} u^2e^{-u}\,\mathrm{d}u = E(Y^2), \quad \text{où } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

Puisqu'on sait que Y admet une variance, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ aussi.

On en déduit que la variable aléatoire X admet une espérance. De plus, en reprenant les calculs précédents, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} t^2e^t\,\mathrm{d}t = -E(Y^2).$$

On conclut par la formule de König-Huygens (puisque Y admet une variance) : $E(X) = -V(Y) - E(Y)^2 = -2$.

3 Existence et calcul de la variance d'une variable aléatoire à densité

(i) Pour montrer qu'une variable aléatoire X de densité f **admet une variance**, il suffit de montrer qu'elle admet un *moment d'ordre 2*, i.e. X^2 admet une espérance (l'existence d'un moment d'ordre 2 suffit à prouver l'existence d'un moment d'ordre 1).

(ii) On calcule ensuite l'espérance de X puis l'espérance de X^2 via le théorème du transfert.

Ce dernier calcul s'effectue généralement via une *intégration par parties*, permettant de réutiliser les outils et résultats du calcul de l'espérance de X.

(iii) On applique enfin le **théorème de König-Huygens** pour obtenir la valeur de la variance de X.

Exercice 3. *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Montrons que $Y = X^2$ admet une variance et $V(X) = \dfrac{4}{45}$.*

La variable X est à valeurs dans le segment $[0, 1]$, donc Y aussi. On en déduit que Y admet espérance et variance.

Appliquons la formule de König-Huygens pour calculer $E(Y)$: $E(Y) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}$.

En appliquant le théorème du transfert à $Y^2 = X^4$ (X admet un moment d'ordre 4 car $X^4(\Omega) = [0, 1]$), on obtient :

$$E(Y^2) = E(X^4) = \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}.$$

On conclut par la formule de König-Huygens (puisque Y admet une variance) : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{45}$.

4 Déterminer la loi du maximum de variables aléatoires indépendantes

Pour déterminer la **loi du maximum** $U = \max(X_1, \dots, X_n)$ **de** n **variables aléatoires indépendantes** $X_1, \dots, X_n$, on suit les étapes ci-dessous.

(i) On commence par déterminer l'univers-image de U.

(ii) On détermine la fonction de répartition de la variable U à l'aide de celles de $X_1, \dots, X_n$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(U \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x, \dots, X_n \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x) \dots P(X_n \leqslant x).$$

Pour déterminer la ***loi du minimum*** $V = \min(X_1, \dots, X_n)$ ***de*** n ***variables aléatoires indépendantes à densité*** $X_1, \dots, X_n$*, on insérera une étape intermédiaire : le calcul, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, de* $P(V > x)$*. En effet :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(V > x) = P(X_1 > x, \dots, X_n > x) = P(X_1 > x) \dots P(X_n > x) = \Big(1 - P(X_1 \leqslant x)\Big) \dots \Big(1 - P(X_n \leqslant x)\Big)$$

Exercice 4. *Déterminons la loi de* $U = \max(X, Y)$ *et* $V = \min(X, Y)$ *où* X *et* Y *sont indépendantes, de loi* $\mathcal{E}(1)$.

- $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

  Pour tout $u \in \mathbb{R}_-^*,\ P(U \leqslant u) = 0$.

  Pour tout $u \in \mathbb{R}_+,\ P(U \leqslant u) = P(X \leqslant u, Y \leqslant u) = P(X \leqslant u)P(Y \leqslant u)$ par indépendance de X et Y. Ainsi :

  $$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ P(U \leqslant u) = \left(1 - e^{-u}\right)^2.$$

  La fonction de répartition de U est donc la fonction :

  $$F_U : u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ (1 - e^{-u})^2 & \text{si } u \geqslant 0. \end{cases}$$

  Cette fonction est trivialement $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions sa continuité en 0 :

  $$\lim_{u \to 0^+} \left(1 - e^{-u}\right)^2 = 0 = F_U(0).$$

  On en déduit que F_U est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire U est donc bien à densité, de densité donnée par :

  $$f_U : u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 2e^{-u}\left(1 - e^{-u}\right) & \text{si } u \geqslant 0. \end{cases}$$

- $V(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

  Pour tout $v \in \mathbb{R}_-^*,\ P(V \leqslant v) = 0$.

  Pour tout $v \in \mathbb{R}_+,\ P(V > v) = P(X > v, Y > v) = P(X > v)P(Y > v)$ par indépendance de X et Y. Ainsi :

  $$\forall v \in \mathbb{R}_+,\ P(V > v) = e^{-2v}.$$

  La fonction de répartition de V est donc la fonction :

  $$F_V : v \mapsto 1 - P(V > v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 1 - e^{-2v} & \text{si } v \geqslant 0. \end{cases}$$

  On reconnait une fonction de répartition connue : V suit la loi exponentielle de paramètre 2.

5 Déterminer la loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes à densité

Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$ de deux variables aléatoires X et Y indépendantes et à densité consiste à déterminer une densité f_S de S, donnée par la formule du produit de convolution :

$$f_S : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_Y(t) \, \mathrm{d}t \quad \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z-t) \, \mathrm{d}t \right).$$

Le calcul de f_S est particulièrement délicat lorsque les densités f_X et f_Y de X et Y sont définies par morceaux.
Pour calculer f_S, on suit les étapes suivantes :

(i) On commencer par déterminer l'univers-image de S.

(ii) Pour $z \in \mathbb{R} \setminus S(\Omega)$, $f_S(z) = 0$ (inutile de faire le calcul intégral).

(iii) Pour calculer $f_S(z)$ lorsque $z \in S(\Omega)$, on détermine une expression par morceaux de la fonction $t \mapsto f_X(z-t)$, puis de la fonction $t \mapsto f_X(z-t) f_Y(t)$, permettant ainsi d'intégrer cette dernière.

Exercice 5. *Déterminons la loi de $S = X - Y$ lorsque X et Y sont deux variables indépendantes de la loi $\mathcal{U}([0,1])$.*

On sait que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [0,1]$, donc $S(\Omega) = [-1,1]$.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, donc X et $-Y$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

On peut montrer (à faire en pratique) que la variable aléatoire $-Y$ est à densité, de densité donnée par la fonction :

$$f_{-Y} : y \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que la variable aléatoire $S = X + (-Y)$ est à densité, de densité f_S donnée par :

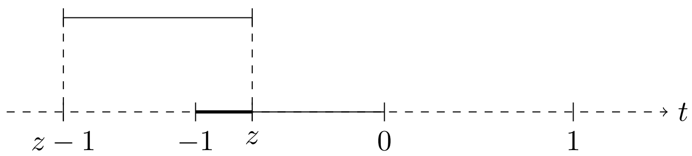
$$f_S : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_{-Y}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $z \notin [-1,1]$, $f_S(z) = 0$. Soit $z \in [-1,1]$.

$$f_X(z-t) f_{-Y}(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant z-t \leqslant 1 \\ -1 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z-1 \leqslant t \leqslant z \\ -1 \leqslant t \leqslant 0. \end{cases}$$

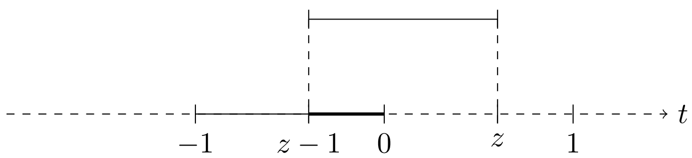
On a alors deux cas de figure :

- Si $z \in [-1,0]$:



$$f_S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_{-Y}(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{z} 1 \, \mathrm{d}t = z + 1.$$

- Si $z \in [0,1]$:



$$f_S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_{-Y}(t) \, \mathrm{d}t = \int_{z-1}^{0} 1 \, \mathrm{d}t = 1 - z.$$

On en déduit une densité de S, la fonction $f_S : z \mapsto \begin{cases} z+1 & \text{si } z \in [-1,0] \\ 1-z & \text{si } z \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$