Exercice 1

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Soient $a \in]0;1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité.

2. On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. Montrer que la variable $X+1$ est à densité et déterminer une densité de $X+1$.

4. On considère la variable aléatoire Y donnée par :

$$Y = \frac{X^2}{2a}.$$

   a. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   b. On pose $U = 1 - e^{-Y}$. Montrer que U est une variable aléatoire à densité. Reconnaître la loi de U.
   c. En déduire une fonction Python `simule_Y` qui simule la variable Y.
   d. Écrire en Python une fonction `simule_X` qui prend en entrée un réel $a \in]0,1]$ et qui simule X.

5. a. Donner sans justification une densité (qu'on notera g) d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de **variance** a.
   b. En déduire que X possède une espérance et la calculer. *On pourra réaliser une intégration par parties.*
   c. En utilisant la variable Y, montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.
   d. En déduire que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(4-\pi)a}{2}$.

6. On considère désormais que le paramètre $a \in]0;1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X. On note :

$$S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

   a. Montrer que S_n admet une espérance égale à a.
   b. Montrer que X^2 admet une variance et montrer que $\mathbb{V}(X^2) = 4a^2$.
   c. Montrer que $\mathbb{V}(S_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ puis, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n à partir de laquelle

$$\mathbb{P}\left(a \in \left]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right[\right) \geqslant 0,95.$$

* *
*