1. La fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Pour $A > 0$, on a :
$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-\frac{x^2}{2a}}\Big]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1, et ainsi que f est une densité.

2. D'après les calculs réalisés à la question précédente, on a :
$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Puisque X est presque-sûrement à valeurs positives, alors $X+1$ est presque-sûrement à valeurs dans $[1,+\infty[$. Soit $z \in \mathbb{R}$. Si $z < 1$, alors $\mathbb{P}(X+1 \leqslant z) = 0$. Si $z \geqslant 1$, alors
$$\mathbb{P}(X+1 \leqslant z) = \mathbb{P}(X \leqslant z-1) = 1 - e^{-\frac{(z-1)^2}{2a}}.$$
La fonction de répartition de $X+1$ est donc la fonction :
$$G : z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1 \\ 1 - e^{-\frac{(z-1)^2}{2a}} & \text{si } z \geqslant 1. \end{cases}$$
La fonction G est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ (car nulle) et sur $]1,+\infty[$ (par théorèmes opératoires). Étudions la continuité en 1 :
$$G(1) = 0,\ \lim_{z\to1^-} G(z) = \lim_{z\to1^-} 0 = 0,\ \lim_{z\to1^+} G(z) = \lim_{z\to1^+} 1 - e^{-\frac{(z-1)^2}{2a}} = 0.$$
On en déduit que la fonction G est continue en 1 donc sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire $X+1$ est donc à densité. Une densité de $X+1$ est la fonction :
$$g : z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1 \\ \dfrac{z-1}{a} e^{-\frac{(z-1)^2}{2a}} & \text{si } z \geqslant 1. \end{cases}$$

4. a. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}(X^2 \leqslant 2ay) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \mathbb{P}\left(X \leqslant \sqrt{2ay}\right) & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X\left(\sqrt{2ay}\right) & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}\end{aligned}$$
On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \leqslant u) &= \mathbb{P}\left(1 - e^{-Y} \leqslant u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(e^{-Y} \geqslant 1-u\right) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}\left(Y \leqslant -\ln(1-u)\right) & \text{si } u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leqslant u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geqslant 1 \end{cases}\end{aligned}$$
On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : U suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

c. C'est du cours.

```python
import random as rd
import numpy as np

def Y():
    return - np.log(1-rd.random())
```

d. Il suffit de remarquer que $X = \sqrt{2aY}$ (puisque X et Y sont presque-sûrement positives).

```python
def X(a):
    y = Y()
    return (2*a*y)**0.5
```

5. a. Encore une question de cours : $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2a\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a}}$.

b. Il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2a\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x.$$

est le moment d'ordre 2 de la loi normale $\mathcal{N}(0,a)$ (égal à sa variance, i.e. a). Par parité de l'intégrande, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2a\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2a\pi}}{2}.$$

On en déduit que X admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\sqrt{2a\pi}}{2}$.

On pouvait aussi réaliser une intégration par parties. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2a}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. De plus, on a $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$ par croissances comparées. Par intégration parties, on trouve que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2a\pi}\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

sont de même nature. D'après la question précédente et par parité de g, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

On en déduit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \Big[-x e^{-\frac{x^2}{2a}} \Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2a\pi}}{2}.$$

On en déduit que X admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\sqrt{2a\pi}}{2}$.

c. Puisque la variable Y admet une espérance, la variable $X^2 = 2aY$ admet une espérance par linéarité et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 2a\,\mathbb{E}(Y) = 2a$.

d. On en déduit que X admet une variance donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = 2a - \frac{a\pi}{2} = \frac{(4-\pi)a}{2}.$$

6. a. Par linéarité, on trouve que S_n admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = a.$$

b. Puisque la variable aléatoire Y admet une variance, la variable aléatoire $X^2 = 2aY$ admet aussi une variance, égale à $\mathbb{V}\left(X^2\right) = 4a^2\,\mathbb{V}(Y) = 4a^2$.

c. Les variables aléatoires $X_1^2, \dots, X_n^2$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Puisqu'elles admettent une variance, la variable aléatoire $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ admet une variance, égale à :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left(X_k^2\right) = 4na^2.$$

Par quadraticité de la variance, la variable aléatoire S_n admet une variance, égale à :

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{4n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) = \frac{a^2}{n} \leqslant \frac{1}{n} \text{ car } a \in]0;1].$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (S_n admet une variance), on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, on trouve alors que :

$$\mathbb{P}\left(a \in \left]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right[\right) \geqslant 1 - \frac{100}{n}.$$

En choisissant n tel que $\dfrac{100}{n} \leqslant 0,05$, i.e. $n \geqslant 2000$, on a :

$$\mathbb{P}\left(a \in \left]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right[\right) \geqslant 0,95.$$

On dit que $\left]S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right[$ est un intervalle de confiance de a pour un niveau de confiance d'au moins 95% dès que $n \geqslant 2000$. Cela revient aussi à dire que si $n \geqslant 2000$, S_n est une approximation de a à 10^{-1}-près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.