Exercice 1

On joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, de la façon suivante :

- On lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile, alors on relance n fois la pièce. On note alors X le nombre de pile obtenu au cours de ces n lancers.

On admet que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

On note $q = 1 - p$.

1. Écrire une fonction en Python qui prend en argument un flottant $p \in]0,1[$ et qui simule la variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$.
4. En déduire la loi de X (on distinguera le calcul de $\mathbb{P}(X = 0)$).
5. Soit $p' \in]0,1[$. On note $q' = 1 - p'$. On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre p' et la loi géométrique de paramètre p'.
   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire BG.
   b. Montrer qu'on peut choisir p' de manière à ce que les variables aléatoires X et BG suivent la même loi.
   c. En déduire que X admet une espérance à déterminer.

Exercice 2

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remises deux jetons de ce sac et on note X le premier numéro tiré, Y le second.

1. Déterminer la loi de X puis montre que Y suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\dfrac{n+1}{12}$.

* *
*