# 1 Couple de variables aléatoires discrètes

## 1.1 Loi conjointe d'un couple

**Proposition-Définition 1**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles discrètes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
L'application

$$(X,Y): \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array},$$

appelée **couple de variables aléatoires**, est une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
L'application

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (i,j) & \mapsto & \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}(X=i, Y=j), \end{array}$$

est appelée **loi du couple** $(X,Y)$, ou encore **loi conjointe** des variables aléatoires $X$ et $Y$.

*Démonstration admise.*

**Exemple 2**

Une personne range 3 paires de chaussettes dans 2 tiroirs d'une même armoire. On note $X_1$ le nombre de paires de chaussettes dans le premier tiroir et $X_2$ celui dans le second tiroir.
Alors $(X_1, X_2)$ est un couple de variables aléatoires discrètes.
Déterminons $X_1(\Omega) \times X_1(\Omega)$ et $(X_1, X_2)(\Omega)$.

**Exemple 3**

On réalise une succession de lancers d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in ]0,1[$.
On note $X$ le rang d'apparition du premier pile et $Y$ le rang d'apparition du deuxième pile.
Déterminons la loi du couple $(X,Y)$.

### 1.2 Lois marginales

**Définition 4**

On appelle **lois marginales** d'un couple $(X,Y)$ de variables aléatoires discrètes les lois des variables $X$ et $Y$.

**Théorème 5 (*Lois marginales via la formule des probabilités totales*)**

Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

(i) $([Y=y])_{y\in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\left(X=x, Y=y\right).$$

(ii) $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}\left(X=x, Y=y\right).$$

**Remarque 6 (Attention !)**

Le théorème précédent montre que la loi du couple détermine entièrement ses lois marginales.
La connaissance des lois marginales ne suffit cependant généralement pas à connaître celle du couple.

**Exemple 7**

On considère une urne comportant 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette urne et l'on note $X$ le nombre de boules blanches et $Y$ le nombre de boules noires tirées.
Déterminons la loi du couple $(X,Y)$ puis les lois marginales.
*On pourra représenter la loi du couple par un tableau à double entrée.*

**Exemple 8 (suite de l'exemple 3)**

Déterminons les lois des variables $X$ et $Y$ à l'aide de la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

## 1.3 Lois conditionnelles

**Définition 9**

Soit $A$ un événement de probabilité non nulle. La **loi conditionnelle** de $X$ **sachant** $A$ est la loi de probabilité :

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_A(X = x). \end{array}$$

**Exemple 10**

Soit $n$ un entier naturel non nul. Soit $(p, p') \in ]0, 1[^2$.
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = k]$ soit $\mathcal{B}(k, p')$.
Déterminons la loi du couple $(X, Y)$ puis de la variable aléatoire $Y$.

## 2 Indépendance de variables aléatoires

**Définition 11 (*Rappel*)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On dit que les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont **indépendantes** si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les événements $[X \leqslant x]$ et $[Y \leqslant y]$ sont indépendants, i.e. :

$$\forall (x,y)^2,\ \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y).$$

**Proposition 12 (*Caractérisation de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes*)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

*Démonstration admise.*

**Remarque 13**

Si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes, la connaissance des lois marginales de $X$ et $Y$ fournit la loi conjointe $(X, Y)$

**Définition 14 (*Rappel*)**

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leqslant x_k).$$

**Proposition 15 (*Caractérisation de l'indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes*)**

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k).$$

*Démonstration admise.*

# 3 Fonction de deux variables aléatoires

## 3.1 Loi de probabilité d'une fonction de deux variables aléatoires

**Exemple 16 (Loi du minimum)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois géométriques de paramètres $p \in ]0,1[$ et $p' \in ]0,1[$. Déterminons la loi de $U = \min(X,Y)$.

**Théorème 17 (*"Somme" de lois Poisson indépendantes* ♥)**

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right).$$

**Exemple 18 ("Somme" de deux lois binomiales indépendantes) ♥**

1. Montrer la formule de Vandermonde : $\forall (m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$ (♥)

2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1,p)$ et $\mathcal{B}(n_2,p)$.
   Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

**Exemple 19 ("Somme" de deux lois uniformes indépendantes) ♥**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Déterminons la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

### 3.2 Espérance

**Théorème 20 (*Théorème du transfert dans le cas de variables aléatoires finies*)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles **finies** et soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
La variable aléatoire $Z = f(X, Y)$ admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} f(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

*Démonstration admise.*

**Exemple 21**

On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On prélève successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note $X_1$ le numéro de la première boule et $X_2$ le numéro de la seconde boule tirée. Déterminer l'espérance de $\min(X_1, X_2)$.

**Proposition 22**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.
Si $X$ et $Y$ admettent une espérance, alors $XY$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

*Démonstration admise.*

### 3.3 Variance et covariance

**Définition 23**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires **réelles**. On dit que le couple $(X, Y)$ admet une **covariance** si la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)$ admet une espérance. Dans ce cas, on note :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big].$$

**Remarque 24**

$(i)$ $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$ $(ii)$ $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

**Théorème 25 (*Formule de König-Huygens*)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.
Alors le couple $(X, Y)$ admet une covariance et :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

*Démonstration admise.*

**Théorème 26 (*Variance d'une somme - lien avec la covariance*)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.
Alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\operatorname{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

**Démonstration.**

**Proposition 27 (*Covariance et variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes*)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors :

(i) $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$,

(ii) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

**Démonstration.**

**Remarque 28 (Attention !)**

Il existe des couples de variables aléatoires **non corrélées** (i.e. de covariance nulle), mais non indépendantes.

**Exemple 29 (Contre-exemple de la proposition 27)**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$ et soit $Y$ la variable indicatrice de l'événement $[X = 0]$. Étudier l'indépendance de $X$ et $Y$ et calculer $\operatorname{Cov}(X, Y)$.