

Exercice 1. ♡[\[Corrigé\]](#) ★☆☆

On lance deux dés équilibrés. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux nombres obtenus et Y la variable aléatoire égale au plus grand de deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .

Exercice 2. ♡[\[Corrigé\]](#) ★☆☆

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire réelle de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $Y = \min(X, m)$.

Exercice 3. ♡[\[Corrigé\]](#) ★☆☆

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.

2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 4. ♡[\[Corrigé\]](#) ★☆☆

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi $\mathcal{B}(p)$. Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) ainsi que la covariance de U et V .
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. ♡[\[Corrigé\]](#) ★☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1/6	1/4	1/6	1/4	1/6

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$ ainsi que celle du couple (X, Y) .
2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. ♡[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telles que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = k]$ soit la loi uniforme sur $\llbracket 0, k \rrbracket$. On note, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_k = \mathbb{P}(Y = k)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) , puis la loi de X .
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$.
3. Montrer que X et $Y - X$ ont même loi.

Exercice 7. ♡[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur du réel a .
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. ♡[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a \frac{i+j}{2^{i+j}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur du réel a .
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 9.[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq k)$.
b. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X \geq Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$.
2. Soient $V = \min(X, Y)$ et $W = X - Y$.
a. Donner la loi du couple (V, W) .
b. En déduire les lois de V et W .
c. Montrer que V et W sont indépendantes.

Exercice 10.[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Le nombre de visiteurs quotidiens à Disneyland Paris suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque visiteur entre dans le parc par une des m entrées $E_1, \dots, E_m$, qu'il choisit de manière équiprobable et indépendamment des autres visiteurs.

On désigne par N le nombre de visiteurs en une journée et X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 durant cette journée.

- Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.
- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X_1 sachant $[N = n]$.
 - En déduire la loi conjointe de N et X_1 , puis la loi de X_1 .
 - En déduire l'espérance et la variance de X_1 .
- Sachant qu'un visiteur sur dix se débrouille pour rentrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs hebdomadaires qui entrent sans payer par l'entrée E_1 .

Exercice 11.[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_i = X_i X_{i+1}$.

- Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_i .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Exercice 12. ♡[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

On a n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et soit Y le numéro de la boule.

- Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
- Déterminer la loi de Y et puis calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 13.[\[Corrigé\]](#) ★★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n personnes se répartissant au hasard dans trois hôtels numérotés 1, 2 et 3. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note X_k le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel k .

- Déterminer la loi des variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 .
- Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, ainsi que son espérance et sa variance.
- Déterminer la covariance de X_1 et X_2 .

Exercice 14. ♡[\[Corrigé\]](#) ★★★

On considère un dé équilibré dont l'une des faces est blanche et les cinq autres sont rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs successives de B et R : par exemple si les neufs premiers lancers donnent les résultats $BBRRRRRRRB$ alors la première série (BB) est de longueur 2 et la seconde $(RRRRRR)$ est de longueur 6. Soient X_1 et X_2 les longueurs respectives de la première et de la deuxième série.

- Déterminer la loi de X_1 . Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
- Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 .
- En considérant $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$, montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 15. ♡[\[Corrigé\]](#) ★★★

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise dans cette urne. On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Z celui de la deuxième boule blanche.

- Déterminer la loi du couple (X, Z) .
- En déduire la loi de Z .

Exercice 16.[\[Corrigé\]](#) ★★★

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi binomiale négative** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$ si :

$$X(\Omega) = \llbracket n, +\infty \rrbracket \text{ et } \forall k \geq n, \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

- Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale négative de paramètres n et p .
- En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative.

Exercice 17. ♡[\[Corrigé\]](#) ★★★

Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$). On admet que les n appels constituent n expériences aléatoires indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

- Déterminer la loi de X .

2. Après ses n recherches, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus la seconde fois et soit $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?

b. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

c. Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k + \ell \leq n$. Montrer que :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k + \ell} \binom{k + \ell}{k} p^{k + \ell} q^{2n - 2k - \ell}.$$

d. En déduire que Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

3. Retrouver le résultat de la question précédent sans réaliser de calcul (en réinterprétant l'expérience).

Corrigé de l'exercice 1. [\[Énoncé\]](#)

1. On note D_1 et D_2 les variables aléatoires égales aux valeurs de chaque dé. Les variables aléatoires D_1 et D_2 suivent toutes les deux la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ et $X = \max(D_1, D_2)$ et $Y = \min(D_1, D_2)$. Il vient immédiatement que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.

- Si $i > j$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$.
- Si $i = j$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(D_1 = i, D_2 = i) = \mathbb{P}(D_1 = i)\mathbb{P}(D_2 = i) = \frac{1}{36}$
par indépendance des dés.
- Si $i < j$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}([D_1 = i, D_2 = j] \cup [D_1 = j, D_2 = i]) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
par disjonctions des événements puis indépendance des dés.

La loi du couple (X, Y) est donc donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{18} & \text{si } i < j \\ \frac{1}{36} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

2. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = j])_{1 \leq j \leq 6}$, on obtient la loi de X :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= \mathbb{P}(X = i, Y = i) + \sum_{j=i+1}^6 \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{6-i}{18}. \end{aligned}$$

En appliquant le système complet d'événements $([X = i])_{1 \leq i \leq 6}$, on obtient la loi de Y par le même raisonnement :

$$\forall j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{36} + \frac{j-1}{18}.$$

Corrigé de l'exercice 2. [\[Énoncé\]](#)

Remarquons que $Y(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $[Y = k] = [X = k]$ donc $\mathbb{P}(Y = k) = q^{k-1}p$.

Calculons $\mathbb{P}(Y = m)$. Puisque $[Y = m] = [X \geq m]$, on obtient (après calculs) :

$$\mathbb{P}(Y = m) = \mathbb{P}(X \geq m) = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}(X = k) = q^{m-1}.$$

La loi de Y est donc donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \mathbb{P}(Y = k) = \begin{cases} q^{k-1}p & \text{si } k < m \\ q^{m-1} & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 3. [\[Énoncé\]](#)

1. Remarquons que $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, on a :

$$\mathbb{P}(Y \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, \dots, X_n \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k) \dots \mathbb{P}(X_n \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Puisque $[Y = k] = [Y \leq k] \setminus [Y \leq k-1]$, la loi de Y est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k-1) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n & \text{si } k > 1 \\ \left(\frac{k}{n}\right)^n & \text{si } k = 1 \end{cases} \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

2. La variable aléatoire Y est finie, elle admet donc une espérance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^n - k \left(\frac{k-1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=2}^n k \left(\frac{k-1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \left(\frac{k}{n}\right)^n \\ &= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. Remarquons que $U(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $V(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. Posons $q = 1 - p$.

La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X = i, Y = j)$	$j = 0$	$j = 1$
$i = 0$	q^2	pq
$i = 1$	pq	p^2

On en déduit la loi du couple (U, V) (et les lois marginales de U et V):

$\mathbb{P}(U = u, V = v)$	$v = -1$	$v = 0$	$v = 1$	$\mathbb{P}(U = u)$
$u = 0$	0	q^2	0	q^2
$u = 1$	pq	0	pq	$2pq$
$u = 2$	0	p^2	0	p^2
$\mathbb{P}(V = v)$	pq	$p^2 + q^2$	pq	

Le couple (U, V) étant fini, il admet une covariance.

On a immédiatement par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(U) = 2p$ et $E(V) = 0$.

On trouve, d'après la formule du transfert : $\mathbb{E}(UV) = -pq + pq = 0$.

On en déduit que $\text{Cov}(U, V) = 0$ d'après la formule de König-Huygens.

2. Remarquons que $\mathbb{P}(U = 0, V = -1) = 0$ alors que $\mathbb{P}(U = 0)\mathbb{P}(V = -1) \neq 0$. Les variables U et V ne sont donc pas indépendantes.

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. On a immédiatement que $Y(\Omega) = \{0; 1; 4\}$. La loi de Y est alors donnée par :

y_i	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = x_i)$	1/6	1/2	1/3

La loi du couple (X, Y) est alors donnée par :

$\mathbb{P}(X = i, Y = j)$	$i = -2$	$i = -1$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
$j = 0$	0	0	1/6	0	0
$j = 1$	0	1/4	0	1/4	0
$j = 4$	1/6	0	0	0	1/6

2. Le couple (X, Y) étant fini, il admet une covariance. On trouve que $\mathbb{E}(X) = 0$ et, en appliquant le théorème du transfert, on trouve $\mathbb{E}(XY) = 0$. La formule de König-Huygens permet de conclure : $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Les variables X et Y ne sont pourtant pas indépendantes : il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(X = -2, Y = 0) = 0$ tandis que $\mathbb{P}(X = -2)\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. On remarque que $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. La loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \mathbb{P}(X = i, Y = k) = \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}_{[Y=k]}(X = i) = \begin{cases} \frac{p_k}{k+1} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $([Y = k])_{0 \leq k \leq n}$:

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{k=i}^n \frac{p_k}{k+1}.$$

2. Les variables X et Y étant finies, elles admettent une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^n i\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n i \frac{p_k}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{k+1} \sum_{i=0}^k i = \sum_{k=0}^n \frac{kp_k}{2} = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y).$$

3. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a (toujours d'après la formule des probabilités totales) :

$$\mathbb{P}(Y - X = i) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}_{[Y=k]}(X = k - i) = \sum_{k=i}^n \frac{p_k}{k+1} = \mathbb{P}(X = i).$$

Les variables aléatoires X et $Y - X$ suivent donc la même loi.

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$, on a (la série converge par σ -additivité) :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{ae}{i!}$$

Puisque $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la série ci-dessous converge par σ -additivité et on a :

$$1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = a \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = ae^2.$$

On en déduit donc que $a = e^{-2}$.

2. En reprenant le résultat de la question précédente, on trouve que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i) = \frac{ae}{i!} = \frac{e^{-1}}{i!} = \frac{1^i}{i!} e^{-1}$$

La variable aléatoire X suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$ de paramètre 1.

Par symétrie de la loi du couple (X, Y) , la variable Y suit la même loi.

3. Un rapide calcul montre que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{i!}e^{-1} \times \frac{1}{j!}e^{-1} = \frac{e^{-2}}{i!j!} = \mathbb{P}(X = i, Y = j).$$

Corrigé de l'exercice 8. [\[Énoncé\]](#)

1. Fixons $i \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \mathbb{P}(X = i, Y = j) &= a \sum_{j=0}^N \frac{i+j}{2^{i+j}} \\ &= a \frac{i}{2^i} \left(\sum_{j=0}^N \frac{1}{2^j} \right) + a \frac{1}{2^i} \left(\sum_{j=0}^N \frac{j}{2^i} \right) \\ &= a \frac{i}{2^i} \left(\sum_{j=0}^N \frac{1}{2^j} \right) + a \frac{1}{2^{i+1}} \left(\sum_{j=1}^N j \left(\frac{1}{2} \right)^{j-1} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} a \frac{i}{2^{i-1}} + a \frac{1}{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

(On reconnaît des sommes partielles de séries géométriques et séries géométriques dérivées, convergentes car de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$).

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$, on a (la série converge par σ -additivité) :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a \frac{i}{2^{i-1}} + a \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Soit $M \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^M \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^M \left(a \frac{i}{2^{i-1}} + a \frac{1}{2^{i-1}} \right) = a \sum_{i=0}^M i \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1} + 2a \sum_{i=0}^M \frac{1}{2^i} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 8a.$$

(On reconnaît des sommes partielles de séries géométriques et séries géométriques dérivées, convergentes car de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$).

$$\text{Or } \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1, \text{ donc } a = \frac{1}{8}.$$

2. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}.$$

Par symétrie de la loi du couple (X, Y) , X et Y suivent la même loi donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}.$$

3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$.

4. Puisque $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales (la série ci-dessous converge par σ -additivité) :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = Y, X = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2i}{2^{2i+3}} = \frac{1}{9},$$

(en reconnaissant une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{4}$).

Corrigé de l'exercice 9. [\[Énoncé\]](#)

1. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} pq^{i-1} = q^{k-1}.$$

On peut retrouver ce résultat par le modèle classique de la loi : en répétant de manière indépendante une expérience de Bernoulli jusqu'au premier succès, l'événement $[X \geq k]$ est réalisé si et seulement si on a fait $k-1$ échecs aux $k-1$ premiers essais.

b. Appliquons, pour chaque calcul, la formule des probabilités avec $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = Y, Y = k) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} \\
 &= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} (q^2)^i \\
 &= p^2 \frac{1}{1 - q^2} \quad (\text{on reconnaît une série géométrique de raison } q^2 \in]-1, 1[) \\
 &= \frac{p}{1 + q}.
 \end{aligned}$$

La même méthode nous donne $\mathbb{P}(X \geq Y) = \frac{1}{1 + q}$ et $\mathbb{P}(X \geq 2Y) = \frac{q}{1 + q + q^2}$.

2. a. On remarque $\mathbb{V}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $W(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(V = i, W = j) &= \mathbb{P}(V = i, X - Y = j) \\
 &= \begin{cases} \mathbb{P}(Y = i, X = i + j) & \text{si } j \geq 0 \\ \mathbb{P}(X = i, Y = i - j) & \text{si } j < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \mathbb{P}(Y = i) \mathbb{P}(X = i + j) & \text{si } j \geq 0 \\ \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = i - j) & \text{si } j < 0 \end{cases} \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
 &= \begin{cases} p^2 q^{2i+j-2} & \text{si } j \geq 0 \\ p^2 q^{2i-j-2} & \text{si } j < 0 \end{cases} \\
 &= p^2 q^{2i+|j|-2}.
 \end{aligned}$$

b. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $([V = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(W = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V = i, W = j) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 q^{2i+|j|-2} \\
 &= \frac{pq^{|j|}}{1 + q}.
 \end{aligned}$$

Par le même raisonnement avec le système complet $([W = j])_{j \in \mathbb{Z}}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(V = i) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(V = i, W = j) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(V = i, W = j) + \sum_{j \in -\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(V = i, W = j) \\
 &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V = i, W = j) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V = i, W = -k) \\
 &= \sum_{j=0}^{+\infty} p^2 q^{2i+j-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2i+k-2} \\
 &= p^2 q^{2i-2} \frac{1}{1 - q} + p^2 q^{2i-2} \left(\frac{1}{1 - q} - 1 \right) \\
 &= p q^{2i-2} (1 + q).
 \end{aligned}$$

On pourra remarquer que V suit la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - q^2)$:

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(V = i) = (1 - q) (q^2)^{i-1} (1 + q) = (1 - q^2) (q^2)^{i-1}.$$

c. On a immédiatement : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, \mathbb{P}(V = i, W = j) = \mathbb{P}(V = i) \mathbb{P}(W = j)$. Les variables aléatoires V et W sont donc indépendantes.

Corrigé de l'exercice 10. [\[Énoncé\]](#)

1. Le nombre moyen de visiteurs en une journée est $\mathbb{E}(N)$, i.e. λ .

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $[N = n]$, X_1 est le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès ("un visiteur entre par l'entrée E_1) est égale à $\frac{1}{m}$. On en déduit que la loi conditionnelle de X_1 sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $p = \frac{1}{m}$.

- b. Notons $q = 1 - p$. Remarquons que $N(\Omega) = X_1(\Omega) = \mathbb{N}$. La loi conjointe de (N, X_1) est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(N = n, X_1 = k) &= \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} e^{-\lambda} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_1 :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X_1 = k) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} e^{-\lambda} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} q^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^i}{i!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda + \lambda q} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire X_1 suit donc la loi de Poisson de paramètre $\lambda p = \frac{\lambda}{m}$.

- c. On en déduit que X_1 admet espérance et variance, égales à $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{V}(X_1) = \frac{\lambda}{m}$.

3. Notons Y_1 le nombre de visiteurs qui entrent sans payer par l'entrée E_1 .

En reprenant le même raisonnement qu'à la question 2.a, on trouve que la loi conditionnelle de Y_1 sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \tilde{p})$ où $\tilde{p} = \frac{p}{10}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En reprenant le raisonnement de la question 2.b, on trouve que Y_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{10m}$.

Le nombre moyen de visiteurs qui entrent sans payer chaque jour par l'entrée E_1 est donc égal à $\frac{\lambda}{10m}$.

Corrigé de l'exercice 11. [\[Énoncé\]](#)

1. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $Y_i(\Omega) = \{0; 1\}$. La variable aléatoire Y_i suit donc une loi de Bernoulli (de paramètre $\mathbb{P}(Y_i = 1)$).

Puisque $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_{i+1} = 1) = p^2$ (par indépendance de X_i et X_{i+1} , la variable aléatoire Y_i suit donc la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p^2)$ de paramètre p^2 .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Y_k admet une espérance et une variance, donc S_n aussi. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = np^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j) \\ &= \sum_{k=1}^n p^2(1 - p^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i X_{i+1}, X_j X_{j+1}) \\ &= np^2(1 - p^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{Cov}(X_i X_{i+1}, X_{i+1} X_{i+2}), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue d'après le lemme des coalitions : si $i + 1 < j$, alors les variables aléatoires $X_i X_{i+1}$ et $X_j X_{j+1}$ sont indépendantes.

En appliquant la formule de König-Huygens (les variables aléatoires en jeu sont finies), on obtient (par indépendance des variables) :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \text{Cov}(X_i X_{i+1}, X_{i+1} X_{i+2}) &= \mathbb{E}(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) - \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) \mathbb{E}(X_{i+1} X_{i+2}) \\ &= p^3 - p^4. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{V}(S_n) = np^2(1 - p^2) + 2(n-1)p^3(1 - p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé de l'exercice 12. [\[Énoncé\]](#)

1. D'après l'énoncé, X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi uniforme $\llbracket 1, k \rrbracket$ par équiprobabilité des tirages.

On remarque que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. On trouve alors que :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{X=k}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{nk} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $([X = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$:

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k, X = Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nk}.$$

3. Par le même argument qu'à la question précédente, on trouve :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{nk}.$$

La variable aléatoire Y étant finie, elle admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \frac{j}{nk} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nk} \sum_{j=1}^k j = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2n} = \frac{n+3}{4}.$$

Corrigé de l'exercice 13. [\[Énoncé\]](#)

1. Les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 suivent trivialement la même loi : la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$.

2. En interprétant $X_1 + X_2$ comme un nombre de succès, on trouve que $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$.

$$\text{Ainsi } \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2n}{3} \text{ et } \mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{2n}{9}.$$

3. Puisque $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + 2 \text{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_2)$, on trouve immédiatement que $\text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{2n}{9}$.

Corrigé de l'exercice 14. [\[Énoncé\]](#)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n (resp. R_n) l'événement "la boule tirée au n -ème lancer est blanche (resp. rouge).

Remarquons que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque

$$[X_1 = n] = (B_1 \cap \dots \cap B_n \cap \mathbb{R}_{n+1}) \cup (R_1 \cap \dots \cap R_n \cap \mathcal{B}_{n+1}),$$

on en déduit la loi de X_1 (par disjonction puis indépendance des événements considérés)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |n \mathbb{P}(X_1 = n)| &= \sum_{n=1}^N n \left(\frac{5}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n \right) \\ &= \frac{5}{6^2} \left(\sum_{n=1}^N n \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^N n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{26}{5}. \end{aligned}$$

On en déduit que X_1 admet une espérance, égale à $\frac{26}{5}$.

2. Remarquons que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\begin{aligned} [X_1 = i, X_2 = j] &= (B_1 \cap \dots \cap B_i \cap \mathbb{R}_{i+1} \cap \dots \cap R_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \cup (R_1 \cap \dots \cap R_i \cap \mathcal{B}_{i+1} \cap \dots \cap B_{i+j} \cap R_{i+j+1}) \end{aligned}$$

On trouve alors la loi du couple (X_1, X_2) de la même manière qu'à la question 1 :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \left(\frac{1}{6}\right)^{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^j + \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{i+1}.$$

Pour déterminer la loi de X_2 , on applique la formule des probabilités totales avec $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'événements :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}).$$

Passons par les sommes partielles pour calculer cette somme. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{6}\right)^{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^j + \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{i+1} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+2} + \left(\frac{1}{6}\right)^j \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k+2} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} + \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^{j-1} \left(\frac{5}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

La loi de X_2 est donc donnée par :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_2 = j) = \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^{j-1} \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

3. On trouve que $\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{65}{324} \neq \frac{5}{36} = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$.

Les variables X_1 et X_2 ne sont donc pas indépendantes.

Corrigé de l'exercice 15. [\[Énoncé\]](#)

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_k l'événement "on tire une boule blanche au k -ème tirage".

Remarquons que $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $Z(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$.

Puisque :

$$[X = i] \cap [Z = j] = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}} \cap B_i \cap \overline{B_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{B_{j-1}} \cap B_j,$$

on trouve, via la formule des probabilités conditionnelles (et après calculs) :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \times \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = i, Z = j) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On obtient immédiatement la loi de Z en appliquant la formule des probabilités totales avec $([X = i])_{1 \leq i \leq n-1}$ comme système complet d'événements :

$$\forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbb{P}(Z = j) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = i, Z = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.$$

Corrigé de l'exercice 16. [\[Énoncé\]](#)

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Le résultat est trivial pour $n = 1$: la loi binomiale négative de paramètres 1 et p est la loi géométrique de paramètre p .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale négative de paramètres n et p et montrons que $X_1 + \cdots + X_{n+1}$ suit la loi binomiale négative de paramètres $n+1$ et p .

Commençons par noter $Y = X_1 + \cdots + X_n$ et $Z = X_1 + \cdots + X_{n+1}$. On a alors $Z = Y + X_{n+1}$. D'après le lemme des coalitions, les variables Y et X_{n+1} sont indépendantes. Puisque $Y(\Omega) = \llbracket n, +\infty \rrbracket$ et $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \rrbracket$, on en déduit que $Z(\Omega) = \llbracket n+1, +\infty \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket n+1, +\infty \rrbracket$. Puisque $([X_{n+1} = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k, X_{n+1} = i) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k-i, X_{n+1} = i) \quad \text{car } Y = Z - X_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k-n} \mathbb{P}(Y = k-i, X_{n+1} = i) \quad \text{car } \forall i > k-n, \mathbb{P}(Y = k-i) = 0 \\ &= \sum_{i=1}^{k-n} \mathbb{P}(Y = k-i) \mathbb{P}(X_{n+1} = i) \quad \text{par indépendance de } Y \text{ et } X_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k-n} \binom{k-i-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-i-n} p (1-p)^{i-1} \\ &= p^{n+1} (1-p)^{k-(n+1)} \sum_{i=1}^{k-n} \binom{k-i-1}{n-1} \\ &= p^{n+1} (1-p)^{k-(n+1)} \sum_{i=1}^{k-n} \binom{k-i}{n} - \binom{k-i-1}{n} \\ &= p^{n+1} (1-p)^{k-(n+1)} \sum_{i=1}^{k-n} \binom{k-i}{n} - \binom{k-i-1}{n} \\ &= \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-(n+1)} \quad (\text{en reconnaissant une somme télescopique}) \end{aligned}$$

On en déduit que Z suit la loi binomiale négative de paramètres $n+1$ et p .

La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale négative de paramètres n et p pour tout $n \geq 1$.

2. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettant une espérance et une variance, la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet aussi une espérance et une variance.

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{p}.$$

Par indépendance des variables $X_1 + \cdots + X_n$, on trouve :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

Une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres n et p admet donc une espérance et une variance, respectivement égales à $\frac{n}{p}$ et $\frac{n(1-p)}{p^2}$.

Corrigé de l'exercice 17. [\[Énoncé\]](#)

1. La variable X est le nombre de succès (obtenir un correspondant), lors de la répétition de n expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre de succès p .

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres n et p et $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

2. a. On trouve immédiatement que $Z = \llbracket 0, n \rrbracket$.

b. La loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n-k, p)$. En effet, sachant $[X = k]$, Y est le nombre de succès ("on obtient un correspondant") lors de la répétition de $n-k$ expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p .

- c. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell) \\ &= \binom{n}{k} \binom{n-k}{\ell} p^{\ell+k} q^{2n-2k-\ell}. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\ell} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} \\ &= \frac{n!}{(k+\ell)!(n-k-\ell)!} \cdot \frac{(k+\ell)!}{\ell!k!} \\ &= \binom{n}{k+\ell} \binom{k+\ell}{k}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k+\ell} \binom{k+\ell}{k} p^{k+\ell} q^{2n-2k-\ell}.$$

- d. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Puisque $([X = k])_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, on a,

d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = i) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Z = i]) \\ &= \sum_{k=0}^i \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = i-k]) \quad \text{car } \forall k < i, \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = i-k]) = 0 \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{k} p^i q^{2n-k-i} \\ &= \binom{n}{i} p^i q^{2n-i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} q^{-k} \\ &= \binom{n}{i} p^i q^{2n-i} (1 + q^{-1})^i \quad (\text{en appliquant la formule du binôme}) \\ &= \binom{n}{i} (1-q)^i q^{2n-2i} q^i (1 + q^{-1})^i \\ &= \binom{n}{i} [(1-q)(1+q)]^i q^{2n-2i} \\ &= \binom{n}{i} (1-q^2)^i (q^2)^{n-i} \end{aligned}$$

On en déduit que Z suit la loi binomiale de paramètres n et $1 - q^2$.

3. On peut ré-interpréter l'expérience en supposant, sans changer la loi de Z , que le secrétaire appelle deux fois chaque correspondant. La variable Z est égale au nombre de correspondants obtenus **au moins** une fois.

La variable aléatoire Z est alors le nombre de succès lors de la répétition indépendantes de n expériences de Bernoulli indépendantes (appeler deux fois chaque correspondant) dont la probabilité de succès est $1 - q^2$ (car la probabilité d'échec est q^2).

La variable Z suit donc la loi binomiale de paramètres n et $1 - q^2$.