Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

On lance deux dés équilibrés. On note X la variable aléatoire égale un plus petit des deux nombres obtenus et Y la variable aléatoire égale au plus grand de deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

Exercice 2. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ et soit X une variable aléatoire réelle de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Déterminer la loi de $Y = \min(X, m)$.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★☆☆

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi $\mathcal{B}(p)$. Soient $U = X+Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) ainsi que la covariance de U et V.
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$ ainsi que celle du couple (X, Y).
2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = k]$ soit la loi uniforme sur $[\![0, k]\!]$. On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = \mathbb{P}(Y = k)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis la loi de X.
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$.
3. Montrer que X et $Y - X$ ont même loi.

Exercice 7. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!},\ a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur du réel a.
2. Reconnaitre les lois marginales de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a\frac{i+j}{2^{i+j}},\ a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur du réel a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X \geqslant k)$.
   b. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 2Y)$.
2. Soient $V = \min(X, Y)$ et $W = X - Y$.
   a. Donner la loi du couple (V, W).
   b. En déduire les lois de V et W.
   c. Montrer que V et W sont indépendantes.

Exercice 10. [Corrigé] ★★☆

Le nombre de visiteurs quotidiens à Disneyland Paris suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque visiteur entre dans le parc par une des m entrées $E_1, \dots, E_m$, qu'il choisit de manière équiprobable et indépendamment des autres visiteurs.
On désigne par N le nombre de visiteurs en une journée et X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 durant cette journée.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.
2. a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X_1 sachant $[N = n]$.
   b. En déduire la loi conjointe de N et X_1, puis la loi de X_1.
   c. En déduire l'espérance et la variance de X_1.
3. Sachant qu'un visiteur sur dix se débrouille pour rentrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs hebdomadaires qui entrent sans payer par l'entrée E_1.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_i = X_iX_{i+1}$.

1. Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_i.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Exercice 12. ♡ [Corrigé] ★★☆

On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et soit Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et puis calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n personnes se répartissant au hasard dans trois hôtels numérotés 1, 2 et 3. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note X_k le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel k.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, ainsi que son espérance et sa variance.
3. Déterminer la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 14. ♡ [Corrigé] ★★★

On considère un dé équilibré dont l'une des faces est blanche et les cinq autres sont rouges.
On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs successives de B et R : par exemple si les neufs premiers lancers donnent les résultats $BBRRRRRRB$ alors la première série (BB) est de longueur 2 et la seconde $(RRRRRR)$ est de longueur 6. Soient X_1 et X_2 les longueurs respectives de la première et de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
3. En considérant $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$, montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 15. ♡ [Corrigé] ★★★

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise dans cette urne. On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Z celui de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 16. [Corrigé] ★★★

On dit qu'une variables aléatoire X suit la **loi binomiale négative** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$ si :

$$X(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\text{ et } \forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale négative de paramètres n et p.
2. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la la loi binomiale négative.

Exercice 17. ♡ [Corrigé] ★★★

Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes $(n \geqslant 2)$. On admet que les n appels constituent n expériences aléatoires indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Déterminer la loi de X.

2. Après ses n recherches, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus la seconde fois et soit $Z = X+Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

   a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?

   b. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

   c. Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k + \ell \leqslant n$. Montrer que :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k+\ell}\binom{k+\ell}{k} p^{k+\ell} q^{2n-2k-\ell}.$$

   d. En déduire que Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

3. Retrouver le résultat de la question précédent sans réaliser de calcul (en réinterprétant l'expérience).