1 Déterminer la loi d'une variable aléatoire $Z = f(X,Y)$

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète Z s'exprimant comme fonctions de deux variables discrètes X et Y, on applique la formule des probabilités totales via le système complet d'événements défini par X ou Y.

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Z=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, f(x,Y)=z)$$

On peut alors se ramener à une expression dépendant de la loi du couple (X,Y), de la forme :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=g(x,z))$$

Trois cas de figure apparaissent alors :

(i) on connait déjà la loi du couple (X,Y) ;

(ii) X et Y sont des variables aléatoires indépendantes dont on connait les lois respectives.
Il faut en particulier être capable de déterminer la loi de Z dans ces trois cas simples :

⋆ $Z = X+Y$ ⋆ $Z = \max(X,Y)$ ⋆ $Z = \min(X,Y)$;

(iii) on connait la loi de X, et, pour tout $k \in X(\Omega)$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$.

Dans tous ces cas, une attention particulière doit être portée sur les bornes des indices de sommation.

Attention ! Écrire l'égalité $\mathbb{P}(X+Y=z) = \mathbb{P}(X=i, Y=z-i)$ (pour un i quelconque) est une erreur classique : en effet, l'événement $[X=i, Y=z-i]$ implique l'événement $[X+Y=z]$ mais n'est généralement pas le seul qui le réalise !

Exercice 1. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. Calculer $\mathbb{P}(Y > X)$.*

On peut appliquer la méthode décrite ci-dessus car l'exercice revient à calculer $\mathbb{P}(Z>0)$ où $Z = Y - X$.

$([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y>X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y>X] \cap [X=k]\right) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y>k] \cap [X=k]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y>k)\mathbb{P}(X=k) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-q)^k \mathbb{P}(1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(1-q)\left((1-p)(1-q)\right)^{k-1} \quad \text{(on reconnait une série géométrique de raison } (1-p)(1-q)\text{)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(1-q)}{1-(1-p)(1-q)} \quad \text{(puisque } (1-p)(1-q) \in]-1,1[\text{, la série converge).}
\end{aligned}$$

Exercice 2. *On dispose d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On note X le nombre de faces obtenus en lançant cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. Si X prend la valeur n, on place n+1 boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule de cette urne. On note Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.*

Commençons par déterminer la loi de X. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in X(\Omega)$, l'événement $[X = n]$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $(n+2)$-ème tirage donne un pile. Il y a donc n+1 choix pour le premier pile. Le rang du premier pile étant choisi, l'événement élémentaire décrit a une probabilité égale à $p^2(1-p)^n$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n$.

On remarque immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ P_{[X=n]}(Y = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

On peut alors déterminer la loi de $Z = X - Y$. Remarquons que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Puisque $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = i) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X - Y = i] \cap [X = n]\right) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y = n - i] \cap [X = n]\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) P_{[X=n]}(Y = n - i) \\
&= \sum_{n=i}^{+\infty} p^2(1-p)^n \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{k+i} \quad \text{(on reconnait une série géométrique de raison } (1-p)) \\
&= \frac{p^2(1-p)^i}{1-(1-p)} \quad \text{(puisque } (1-p) \in]-1,1[\text{, la série converge)} \\
&= p(1-p)^i.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que $Z + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

2 Étudier l'indépendance de variables aléatoires discrètes

L'indépendance de deux variables aléatoires est une propriété très forte (infinité d'égalité à vérifier).

- Pour montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes, on utilise souvent le lemme de coalitions sur des variables aléatoires qu'on sait indépendantes.
- Pour montrer que deux variables aléatoires discrètes X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que :

$$\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \neq \mathbb{P}\left([X=x] \cap [Y=y]\right).$$

On commencera par chercher un couple (x,y) tel que l'événement $[X=x] \cap [Y=y]$ soit impossible et tel que $\mathbb{P}(X=x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$.

Exercice 3. *Étudier l'indépendance des variables Y et Z de l'exemple 2.*

Déterminons tout d'abord la loi de Y. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
D'après la formule des probabilités totales via le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k, X=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)P_{[X=n]}(Y=k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} p^2(1-p)^n \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j+k} \quad \text{(on reconnait une série géométrique de raison } (1-p)) \\
&= \frac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)} \quad \text{(puisque } (1-p) \in]-1,1[\text{, la série converge)} \\
&= \mathbb{P}(1-p)^k.
\end{aligned}$$

Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\mathbb{P}(Y=i, Z=j) = \mathbb{P}(Y=i, X=i+j) = \mathbb{P}(X=i+j)P_{[X=i+j]}(Y=j) = p^2(1-p)^{i+j}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}(Z=j) = \mathbb{P}(1-p)^i\mathbb{P}(1-p)^j = \mathbb{P}(Y=i, Z=j).$$

De plus, puisque, pour tout $(i,j) \notin \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(Y=i)\mathbb{P}(Z=j) = 0 = \mathbb{P}(Y=i, Z=j)$, les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4. *On dispose d'une urne contenant 6 boules rouges et 8 boules jaunes. On tire sans remise trois boules de la boîte. On note X (respectivement Y) le nombre de boules rouges (respectivement jaunes) tirées parmi les 3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*

Puisque $X+Y=3$, l'événement $[X=3] \cap [Y=3]$ est impossible (donc de probabilité nulle). Or, on peut montrer par dénombrement que :

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{8}{0}}{\binom{14}{3}} \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(Y=3) = \frac{\binom{6}{0}\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}} \neq 0.$$

Puisque $\mathbb{P}\left([X=3] \cap [Y=3]\right) = 0 \neq \mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(Y=3)$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.