1 Déterminer la loi d'une variable aléatoire $Z = f(X, Y)$

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète Z s'exprimant comme fonctions de deux variables discrètes X et Y, on applique la formule des probabilités totales via le système complet d'événements défini par X ou Y.

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, f(x, Y) = z)$$

On peut alors se ramener à une expression dépendant de la loi du couple (X, Y), de la forme :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = g(x, z))$$

Trois cas de figure apparaissent alors :

(i) on connait déjà la loi du couple (X, Y) ;

(ii) X et Y sont des variables aléatoires indépendantes dont on connait les lois respectives.
Il faut en particulier être capable de déterminer la loi de Z dans ces trois cas simples :

$\star$ $Z = X + Y$ $\star$ $Z = \max(X, Y)$ $\star$ $Z = \min(X, Y)$;

(iii) on connait la loi de X, et, pour tout $k \in X(\Omega)$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

Dans tous ces cas, une attention particulière doit être portée sur les bornes des indices de sommation.

Attention ! Écrire l'égalité $\mathbb{P}(X + Y = z) = \mathbb{P}(X = i, Y = z - i)$ (pour un i quelconque) est une erreur classique : en effet, l'événement $[X = i, Y = z - i]$ implique l'événement $[X + Y = z]$ mais n'est généralement pas le seul qui le réalise !

Exercice 1. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. Calculer $\mathbb{P}(Y > X)$.*
On peut appliquer la méthode décrite ci-dessus car l'exercice revient à calculer $\mathbb{P}(Z > 0)$ où $Z = Y - X$.
$([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y > X] \cap [X = k]\right) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y > k] \cap [X = k]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k)\mathbb{P}(X = k) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - q)^k p (1 - p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - q)\left[(1 - p)(1 - q)\right]^{k-1} \quad \text{(on reconnait une série géométrique de raison } (1-p)(1-q)\text{)} \\
&= \frac{p(1 - q)}{1 - (1 - p)(1 - q)} \quad \text{(puisque } (1-p)(1-q) \in]-1, 1[\text{, la série converge).}
\end{aligned}$$

Exercice 2. *On dispose d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On note X le nombre de faces obtenus en lançant cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. Si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule de cette urne. On note Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.*

Commençons par déterminer la loi de X. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in X(\Omega)$, l'événement $[X = n]$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $(n+2)$-ème tirage donne un pile. Il y a donc n+1 choix pour le premier pile. Le rang du premier pile étant choisi, l'événement élémentaire décrit a une probabilité égale à $p^2(1-p)^n$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n$.

On remarque immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P_{[X=n]}(Y = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

On peut alors déterminer la loi de $Z = X - Y$. Remarquons que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Puisque $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = i) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X - Y = i] \cap [X = n]\right) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Y = n - i] \cap [X = n]\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) P_{[X=n]}(Y = n - i) \\
&= \sum_{n=i}^{+\infty} p^2(1-p)^n \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{k+i} \quad \text{(on reconnait une série géométrique de raison } (1-p)) \\
&= \frac{p^2(1-p)^i}{1-(1-p)} \quad \text{(puisque } (1-p) \in]-1,1[\text{, la série converge)} \\
&= p(1-p)^i.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que $Z + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

2 Étudier l'indépendance de variables aléatoires discrètes

L'indépendance de deux variables aléatoires est une propriété très forte (infinité d'égalité à vérifier).

- Pour montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes, on utilise souvent le lemme de coalitions sur des variables aléatoires qu'on sait indépendantes.
- Pour montrer que deux variables aléatoires discrètes X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que :

$$\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \neq \mathbb{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right).$$

On commencera par chercher un couple (x, y) tel que l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ soit impossible et tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$.

Exercice 3. *Étudier l'indépendance des variables Y et Z de l'exemple 2.*

Déterminons tout d'abord la loi de Y. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

D'après la formule des probabilités totales via le système complet d'événements $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, X = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) P_{[X=n]}(Y = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} p^2(1-p)^n \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j+k} \quad \text{(on reconnait une série géométrique de raison } (1-p)) \\
&= \frac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)} \quad \text{(puisque } (1-p) \in]-1, 1[\text{, la série converge)} \\
&= \mathbb{P}(1-p)^k.
\end{aligned}$$

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\mathbb{P}(Y = i, Z = j) = \mathbb{P}(Y = i, X = i + j) = \mathbb{P}(X = i + j)P_{[X=i+j]}(Y = j) = p^2(1-p)^{i+j}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(Z = j) = \mathbb{P}(1-p)^i\mathbb{P}(1-p)^j = \mathbb{P}(Y = i, Z = j).$$

De plus, puisque, pour tout $(i, j) \notin \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(Z = j) = 0 = \mathbb{P}(Y = i, Z = j)$, les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4. *On dispose d'une urne contenant 6 boules rouges et 8 boules jaunes. On tire sans remise trois boules de la boîte. On note X (respectivement Y) le nombre de boules rouges (respectivement jaunes) tirées parmi les 3.*
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Puisque $X + Y = 3$, l'événement $[X = 3] \cap [Y = 3]$ est impossible (donc de probabilité nulle). Or, on peut montrer par dénombrement que :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{8}{0}}{\binom{14}{3}} \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{\binom{6}{0}\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}} \neq 0.$$

Puisque $\mathbb{P}\left([X = 3] \cap [Y = 3]\right) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 3)$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.