Remarque 1 (Identification point/vecteur dans $\mathbb{R}^n$)

Si on se donne un point O de $\mathbb{R}^n$, l'application qui à tout point M de $\mathbb{R}^n$ associe le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est une bijection. Il est donc équivalent de parler de points ou de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, en ayant préalablement fixé un point (l'origine).

1 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 2

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

La notation du produit scalaire peut varier dans la littérature : on peut trouver $(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v})$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ ou $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$.

Exemple 3 (Calcul de produits scalaires)

Calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans les différents cas suivants :

(i) $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-2, 3, 4)$

(ii) $\overrightarrow{u} = (0, 1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (4, 3, 2, 1)$

Proposition 4 (*Propriétés du produit scalaire*)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{u} = 0$

(ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (symétrie du produit scalaire)

(iii) $(\overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$ (linéarité par rapport à la première variable)

(iv) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)

(v) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geqslant 0$ (positivité du produit scalaire)

(vi) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (le produit scalaire est défini).

Démonstration admise.

Remarque 5

L'application $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ est dite **bilinéaire** (i.e linéaire par rapport à chacune de ses variables), **symétrique**, **définie positive**.

Corollaire 6 (*Bilinéarité du produit scalaire*)

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ un p-uplet de réels et $(\mu_1, \dots, \mu_q)$ un q-uplet de réels.
Soient $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ un p-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_q})$ un q-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j \overrightarrow{v_j} \right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j \overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{v_j}$$

Démonstration admise.

1.2 Norme euclidienne

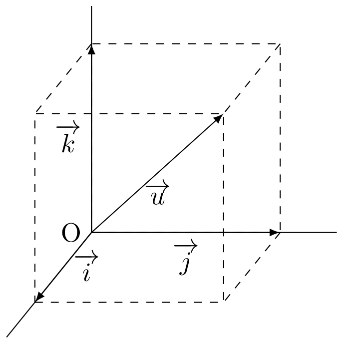
Définition 7

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On appelle **norme euclidienne** (ou plus simplement **norme**) du vecteur $\overrightarrow{u}$ le réel noté $\|\overrightarrow{u}\|$ défini par :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}.$$

Exemple 8 (Calcul de norme)

Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ représenté dans le repère orthonormé ci-dessous :



Proposition 9

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et λ un réel. Alors :

(i) $\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0$ (ii) $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|$ (iii) $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration admise.

Théorème 10 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Démonstration.

Exemple 11 (Application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Montrons que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z \leqslant \sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}$.

Théorème 12 (*Inégalité triangulaire*)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|.$$

Démonstration.

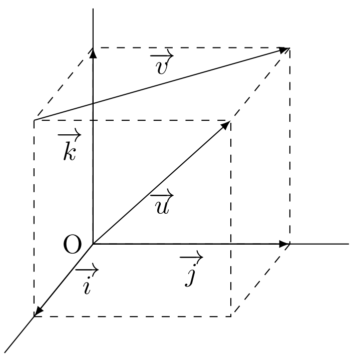
1.3 Orthogonalité

Définition 13

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exemple 14

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ représentés dans le repère orthonormé ci-dessous sont-ils orthogonaux ?

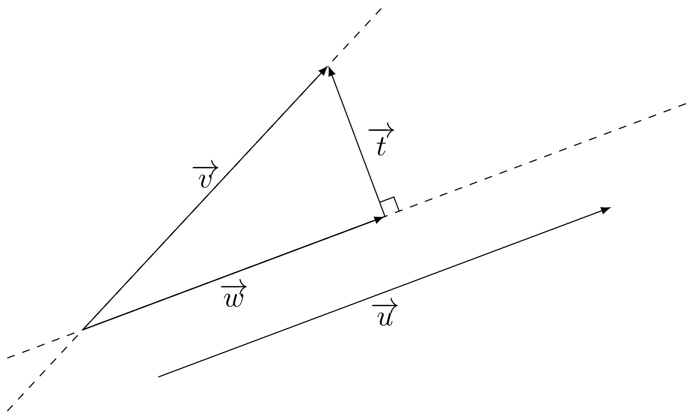


Remarque 15

La bilinéarité du produit scalaire assure que, si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux, alors, pour tous réels λ et μ, $\lambda\overrightarrow{u}$ et $\mu\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Exemple 16

Comparer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ (en supposant que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires).



Définition 17

On dit qu'une $(\overrightarrow{u_i})_{i\in I}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une **famille orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux-à-deux orthogonaux, i.e.

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow \overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{u_j} = 0.$$

On dit qu'une $(\overrightarrow{u_i})_{i\in I}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une **famille orthonormée** (on dit aussi **orthonormale**) si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont de norme égale à 1.

Exemple 18

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormée.

Proposition 19 (*Liberté d'une famille orthogonale*)

Toute famille orthogonale de vecteurs <u>non nuls</u> de $\mathbb{R}^n$ est libre.

Démonstration.

Théorème 20 (*Théorème de Pythagore*)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 .$$

Démonstration.

2 Bases orthonormées

2.1 Existence et premières propriétés

Théorème 21 (*admis*)

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ différent de $\{\overrightarrow{0}\}$ admet une base orthonormée, pouvant être complétée en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Définition 22

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On appelle produit scalaire de X et Y, généralement noté $\langle X, Y\rangle$, le réel :

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y \quad \text{(en identifiant } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ à } \mathbb{R}).$$

Proposition 23 (*Écriture matricielle du produit scalaire*)

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ leurs coordonnées respectives dans $\mathcal{B}$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices-colonnes des coordonnées respectives de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans $\mathcal{B}$. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, on a alors :

(i) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y = \langle X, Y\rangle$;

(ii) $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T X = \|X\|^2$.

Démonstration.

Remarque 24

La propriété précédente assure que le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière **dans toutes les bases orthonormées**

Proposition 25

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$.
En notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_i}.$$

En particulier, on a :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_i})\, \overrightarrow{e_i} \qquad \text{et} \qquad \|\overrightarrow{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_i})^2\,.$$

Démonstration.

Remarque 26

Le résultat précédent permet de déterminer les coordonnées de tout vecteur dans une base orthonormée en calculant n produits scalaires.

Remarque 27

Le même raisonnement s'applique à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ non réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, comme énoncé ci-dessous.
Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel $F \neq \{\overrightarrow{0}\}$ de $\mathbb{R}^n$.
Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de F, on a :

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{p} (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_i})\, \overrightarrow{e_i}.$$

Exemple 28

Soient $\overrightarrow{u} = (2, 3)$, $\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrons que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.
2. Déduisons-en les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans cette base.
3. On note $\overrightarrow{e_3} = 2\overrightarrow{e_2}$. Vérifier que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
4. A-t-on l'égalité : $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_1})\, \overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_3})\, \overrightarrow{e_3}$?

Proposition 29

Soient $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_2 = \left(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\right)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
La famille $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, la matrice P de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$ vérifie :

$$P^T P = I_n.$$

En particulier, la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans une autre (base orthonormée de $\mathbb{R}^n$) est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et son inverse est sa transposée.
On dit que P est une matrice (de passage) **orthogonale**.

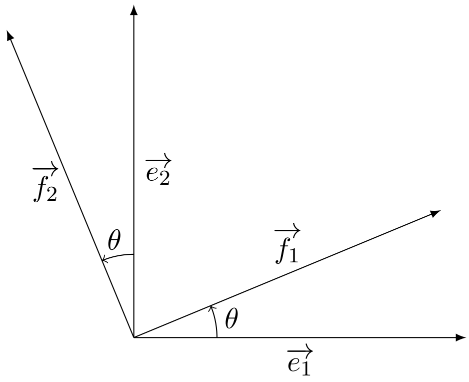
Démonstration.

Remarque 30

On utilisera très souvent ce résultat pour passer de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 31 (Matrice de rotation)

On représente ci-dessous les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$, $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ de $\mathbb{R}^2$ (construits par rotation d'un angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$). Déterminons la matrice P de passage de $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ à $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ puis son inverse P^{-1}.



2.2 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Proposition 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique (on note $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$).
Deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Remarque 33

On dit que les espaces propres d'une matrice symétrique réelles sont **deux-à-deux orthogonaux**.

Théorème 34 (*Théorème spectral - diagonalisation des matrices symétriques réelles*)

Pour toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} A = PDP^T \\ P^{-1} = P^T. \end{cases}$$

Démonstration admise.

Remarque 35 À retenir

Tout matrice symétrique réelle est diagonalisable via une matrice de passage orthogonale.

Exemple 36

Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ via une matrice de passage orthogonale.

2.3 Projection orthogonale

Définition 37

On appelle **orthogonal** d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble, noté $F^\perp$, des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à tout vecteur de F :

$$F^\perp = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in F,\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0\}.$$

Exemple 38

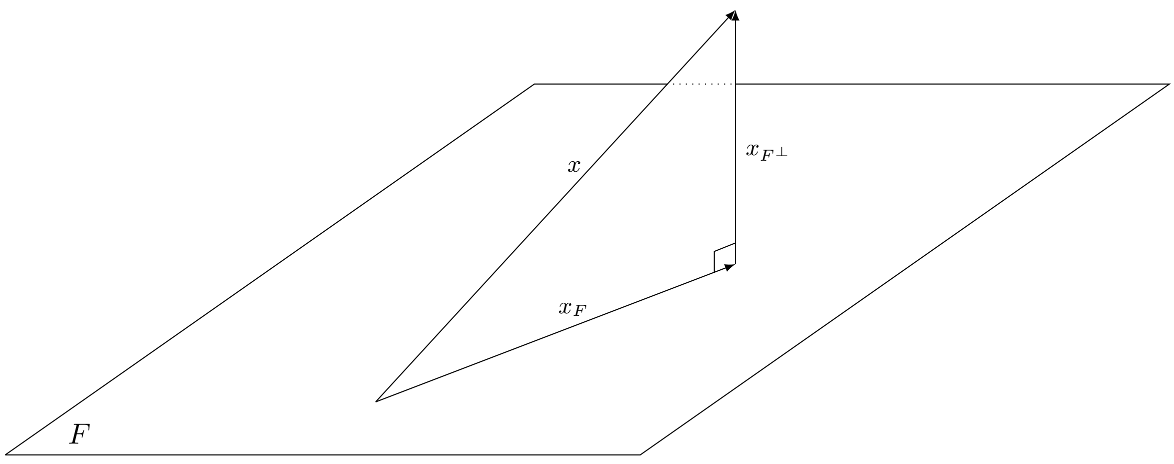
Déterminer $F^\perp$ dans le cas où $F = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ puis $F = \mathbb{R}^n$.

Proposition 39

Si F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 40 (*Décomposition d'un vecteur sur F et F*$^\perp$)

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $x = x_F + x_{F^\perp}$.
Le vecteur x_F est appelé **projeté orthogonal** de x sur F.



Démonstration.

Corollaire 41

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\dim F + \dim F^{\perp} = n.$$

Démonstration admise.

Définition 42

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On appelle **projection orthogonale** sur F l'application qui, à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ son projeté orthogonal sur F.

Théorème 43 (*Écriture du projeté orthogonal dans une base orthonormée*)

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_q})$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.
En notant p la projection orthogonale sur F, on a :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n,\ p(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{q} (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_i})\, \overrightarrow{e_i}.$$

Démonstration. cf démonstration du théorème 40.

Théorème 44 (*Caractérisation de la projection orthogonale*)

La projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est l'unique endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} p \circ p = p \\ \mathrm{Im}(p) = F \\ \mathrm{Ker}(p) = F^{\perp}. \end{cases}$$

Exemple 45

Déterminons le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ sur le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^3$ où $\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 0, 1)$.

Exemple 46

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à identifier.

2. Justifier que A est diagonalisable puis la diagonaliser. Pouvait-on prévoir la forme de la matrice diagonale ?

2.4 Distance

Définition 47

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **distance** entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ défini par :

$$d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|.$$

Définition 48

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
On appelle **distance** entre $\overrightarrow{u}$ et A le réel noté $d(\overrightarrow{u}, A)$ défini par :

$$d(\overrightarrow{u}, A) = \inf_{v \in A} \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| \quad \left(= \inf_{v \in A} d(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \right).$$

Remarque 49

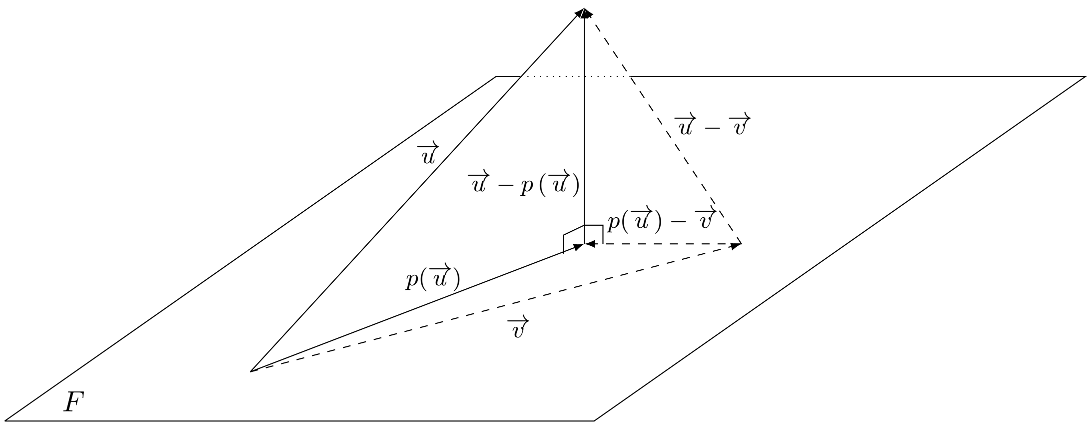
La borne inférieure existe bien car l'ensemble $\left\{ \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| \in \mathbb{R}, \mid \overrightarrow{v} \in A \right\}$ est bien non vide et minoré (par 0).

Théorème 50 (*Caractérisation de la distance à un sous-espace vectoriel par la projection orthogonale*)

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ non réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et p la projection orthogonale sur F.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$d(\overrightarrow{u}, F) = \|\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u})\|.$$

Démonstration.



Exemple 51

Déterminons la distance du vecteur $\overrightarrow{u} = (5, -2) \in \mathbb{R}^2$ à la droite (vectorielle) F d'équation $\sqrt{3}x - 3y = 0$.

Remarque 52. Interprétation géométrique de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés

On considère un nuage de points $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (d'abscisses deux-à-deux distinctes). Déterminer la droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés revient à déterminer un couple de réels (a, b) qui minimise la quantité :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

En posant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, et $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, on remarque que $f(a, b) = \|y - (ax + bu)\|^2$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En notant, $F = \mathrm{Vect}(x, u)$, il vient alors que :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a, b) = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|y - (ax + bu)\|^2 = \min_{v\in F} \|y - v\|^2 = d(y, F)^2.$$

Pour rappel, le couple $(\hat{a}, \hat{b})$ qui minimise f sur $\mathbb{R}^2$ vérifie $\hat{a} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}$ et $\hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\overline{x}$, où s_{xy} est la covariance du couple (x, y) et s_x^2 la variance de x.