Exercice 1. Identités de polarisation ♡ [Corrigé] ★☆☆

Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x \mid y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

Exercice 2. Identité du parallélogramme [Corrigé] ★☆☆

Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★☆☆

1. Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de l'espace de rayon 2 et de centre $\Omega(1,1,1)$.
2. Vérifier que le point $A(2,2,1+\sqrt{2})$ appartient à la sphère.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent à la sphère $\mathcal{S}$ au point A.

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

Montrer que, pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + iI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

On pourra considérer le spectre de A.

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★★☆

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$.
2. $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\ \sum_{k=1}^n x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Exercice 6. ♡ [Corrigé] ★★☆

Pour chacune des matrices A ci-dessous, déterminer une matrice carrée P telle que P^TAP soit une matrice diagonale.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Orthogonal d'une partie ♡ [Corrigé] ★★☆

Pour toute partie A de $E = \mathbb{R}^n$, on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall a \in A,\ \langle x \mid a\rangle = 0\}.$$

1. Déterminer $\{0_E\}^\perp$ et $E^\perp$.
2. Soient A et B des parties de $\mathbb{R}^n$.
   a. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   b. Montrer que $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.
   c. Montrer l'implication : $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
   d. Vérifier l'égalité $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Exercice 8. Matrice d'une projection orthogonale ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit F le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + z = 0$.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 9. Distance à un sous-espace vectoriel ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $e_1 = (1,2,2)$ et $e_2 = (2,1,-2)$.

1. Montrer que la famille (e_1,e_2) est orthogonale.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ définie ci-dessous est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right)$$
4. Déterminer la matrice de p dans cette base.
5. Calculer la distance du point A de coordonnées $(1,1,1)$ au plan F.

Exercice 10. ♡ [Corrigé] ★★★

1. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit p la projection orthogonale sur F. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ f = f$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
   a. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}\, f$, $f(y) = y$.
   b. Montrer que le projeté orthogonal sur $\mathrm{Ker}\, f$ de tout vecteur de $\mathrm{Im}\, f$ est le vecteur nul.
   c. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 11. Étude d'une symétrie de $\mathbb{R}^3$ [Corrigé] ★★☆

On considère l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -6 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que s conserve les distances (on dit que s est une **isométrie**), i.e. :
$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|s(x)\| = \|x\|.$$
2. Déterminer l'ensemble F des points fixes de s.
3. Déterminer l'application $s \circ s$. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que l'application $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ à déterminer (en fonction de s).

Exercice 12. [Corrigé] ★★☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = A + A^T$ soit nilpotente, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$. En identifiant une matrice symétrique, montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, i.e. $A^T = -A$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique. On suppose que A vérifie $A + A^T = 2I_n$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Déterminer à quel espace appartient $X^T A X$ puis en déduire que $X^T A X = X^T A^T X$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$.
3. En déduire que f admet au plus une valeur propre.

Exercice 14. [Corrigé] ★★★

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^T A$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. On note $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.
3. Application : déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. [Corrigé] ★★★

On considère la fonction suivante :

$$f \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y-1)^2 + (x-3y)^2 + (y-1)^2 \end{array}$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

1. Première méthode : géométrique euclidienne.
   a. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un vecteur $u_{x,y} \in \mathbb{R}^3$ dépendant de (x,y) et un vecteur v indépendant de (x,y) tel que $f(x,y) = \|u_{x,y} - v\|^2$.
   b. Identifier l'ensemble $F = \left\{u_{x,y} \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   c. En déduire que f admet un minimum en un point de $\mathbb{R}^2$ qu'on déterminera.
2. Seconde méthode : étude des points critiques.
   a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   b. Montrer que f admet un point critique qu'on déterminera.
   c. En déduire que f admet un minimum.