1 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

On a souvent l'intuition d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer une inégalité, sans pour autant réussir à identifier les deux vecteurs x et y en jeu.
Pour y arriver, on suit les étapes suivantes :

(i) on commence par identifier l'un des vecteurs, qu'on notera x, dans le membre le plus grand de l'inégalité à prouver. Pour ce faire, on cherche une somme de réels au carré, donnant ainsi les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (l'entier n est égal au nombre de termes de la somme) ;

(ii) une fois le vecteur x identifié, on cherche le vecteur des réels $y_1, \dots, y_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ corresponde au membre le plus petit de l'inégalité à prouver. On a alors trouvé le vecteur $(y_1, \dots, y_n)$;

(iii) on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au deux vecteurs x et y et on la compare avec l'inégalité à prouver.

Exercice 1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{(n+1)2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}^2.$$

En posant $x_k = \sqrt{\binom{n}{k}}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on trouve que le vecteur $x = (x_0, \dots, x_n)$ vérifie $\|x\| = \sqrt{2^n}$.
On cherche alors $y = (y_0, \dots, y_n)$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k y_k = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}.$$

Le vecteur $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ convient.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle x \mid y \rangle \leqslant \|x\| \|y\|$. Puisque $\|y\| = \sqrt{n+1}$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{(n+1)2^n}.$$

2 Ortho-diagonalisation d'une matrice symétrique réelle

Le théorème spectral assure qu'une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable via une matrice de passage orthogonale. Il faut donc trouver une matrice diagonale D et une matrice de passage orthogonale P telles que $A = PDP^1$ et $P^T = P^{-1}$.

Pour cela, on commence par déterminer les valeurs propres puis une base de chaque espace propre de A (étape usuelle de diagonalisation). *On pourra vérifier que la somme des dimensions des espaces propres est égale à n et la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) est égale à la trace.*

Il faut ensuite déterminer une base **orthonormée** de chaque espace propre de A. Le principe général de cette méthode est hors-programme mais mérite d'être connu pour des espaces propres de dimension 1 et 2.

- Si un espace vectoriel est de dimension 1, il suffit "diviser" l'unique vecteur de la base trouvée par sa norme pour déterminer une base orthonormée de F.
- Si un espace vectoriel F est de dimension 2, on suppose qu'on dispose d'une base (u, v) de F.
  (i) On obtient un premier vecteur normé x en "divisant" le vecteur u par sa norme : $x = \dfrac{1}{\|u\|}u$.
  (ii) On peut ensuite déterminer un vecteur $w = a.u + v \in F$ (où $a \in \mathbb{R}$) orthogonal à u en résolvant l'équation $\langle u \mid w\rangle = 0$ d'inconnue $a \in \mathbb{R}$. On calcule pour cela le produit scalaire $\langle u \mid v\rangle$.
  En "divisant" le vecteur w par sa norme, on obtient un vecteur y tel que (x, y) est une base orthonormée de F : $y = \dfrac{1}{\|w\|}w$.
- pour des espaces de dimension supérieure ou égale à 3, le sujet vous demandera sûrement de prouver qu'une famille de vecteurs est orthonormée, ou tout du moins orthogonale (et il ne faudra pas oublier de "diviser" chaque vecteur par sa norme).

Exercice 2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. *Déterminer $P \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $P^T = P^{-1}$ et P^TAP soit diagonale.*

La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable via une matrice de passage orthogonale.

La recherche des valeurs propres de A donne : $\mathrm{Sp}(A) = \{-3; 3\}$. La recherche des espaces propres de A donne :

$$E_{-3} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Remarquons que l'orthogonalité des espaces propres E_3 et E_{-3}. On note $a = (1, 1, 1)$, $b = (-1, 1, 0)$ et $c = (-1, 0, 1)$.

Puisque $\|a\| = \sqrt{3}$, $x = \dfrac{1}{\|a\|}a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ est un vecteur normé.

On note $y = \dfrac{1}{\|b\|}b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$. Cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda b + c$ soit orthogonal à b. Puisque $\langle b \mid c\rangle = 1$, on a :

$$\langle \lambda b + c \mid b\rangle = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Le vecteur $\tilde{z} = -\dfrac{1}{2}b + c = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$ est donc orthogonal à b (et donc à y).

En posant $z = \dfrac{1}{\|\tilde{z}\|}\tilde{z} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$, la famille (x, y, z) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $A = PDP^T$, où $P^T = P^{-1}$ (P est une matrice de passage orthogonale) et :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

3 Déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel

Pour déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel non trivial F de $\mathbb{R}^n$, on suit les étapes suivantes :

(i) on commence par déterminer une base **orthonormée** $(e_1, \dots, e_p)$ de F (cf. méthode précédente) ;

(ii) on calcule les produits scalaires $\langle x \mid e_i \rangle$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$;

(iii) on utilise enfin l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur dans une base orthonormée :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i.$$

Exercice 3. *Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathbb{P}$ d'équation $x + y + z = 0$.*

Déterminons une base orthonormée de $\mathbb{P}$.

- **Calcul direct** (méthode classique).

  Les calculs de l'exemple précédent montrent que (x, y), où $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ et $y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$, forme une base orthonormée de $\mathbb{P}$. Puisque $\langle u \mid x \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle u \mid y \rangle = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, le projeté orthogonal de u sur F est :

  $$p(u) = \langle u \mid x \rangle \, x + \langle u \mid y \rangle \, y = \frac{1}{2}(-1,1,0) - \frac{1}{6}(-1,-1,2) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

- **Méthode subtile et efficace dans** $\mathbb{R}^3$ (pour ceux qui veulent améliorer leur "vision" géométrique).

  Puisque le plan $\mathbb{P}$ a pour équation $x + y + z = 0$, le vecteur $a = (1,1,1)$ dirige une droite vectorielle Δ orthogonale à $\mathbb{P}$. Notons $q(u)$ le projeté orthogonal de u sur Δ. Montrons que $q(u) = u - p(u)$.

  Par définition du projeté orthogonal de u sur $\mathbb{P}$, le vecteur $u - p(u)$, qu'on notera v, est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{P}$, donc appartient à la droite Δ. De plus $u - v = p(u)$ appartient à $\mathbb{P}$ et est donc orthogonal à tout vecteur de Δ. Ainsi $v \in \Delta$ et $u - v$ est orthogonal à tout vecteur de Δ. Par unicité du projeté orthogonal de u sur Δ, $q(u) = u - p(u)$.

  Pourquoi avoir fait tout ça ? Parce qu'il est bien plus aisé de déterminer une base orthonormée d'un espace vectoriel de dimension 1 que de dimension 2.

  Posons $\tilde{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Puisque $(\tilde{a})$ forme une base orthonormée de Δ, on a :

  $$q(u) = \langle u \mid \tilde{a} \rangle \, \tilde{a} = \frac{4}{\sqrt{3}} \tilde{a} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

  On en déduit que $p(u) = u - q(u) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

4 Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Pour calculer la distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F non trivial de $\mathbb{R}^n$, il suffit de déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. La distance de x à F est alors $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Exercice 4. *Calculer la distance du vecteur $u = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathbb{P}$ d'équation $x + y + z = 0$.*

D'après la question précédente, le vecteur $p(u) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de u sur $\mathbb{P}$.

Puisque $u - p(u) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$, la distance de u au plan $\mathbb{P}$ est :

$$d(u, \mathbb{P}) = \|u - p(u)\| = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$