

**Exercice 1**

1. 

```
def occurrence(L):
    occ = [0 for k in range(10)]
    for k in range(len(L)):
        occ[L[k]] += 1
    return occ
```
2. a. L'instruction `mystere([1, 8, 1, 1, 4, 7, 4, 4, 7])` renvoie `[1,4]`.  
b. L'instruction `mystere(L)` renvoie la liste des chiffres majoritaires de L, i.e. ceux dont le nombre d'occurrences est maximal.

**Exercice 2**

1. La fonction  $\left(t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  par théorèmes opératoires.

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Or l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  converge. En effet, pour  $A > 0$ , on a :

$$\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^A = \arctan(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$  converge.

2. La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$  est  $\mathcal{C}^1$  et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . En posant  $x = \frac{1}{t}$ , on a  $dt = -\frac{dx}{x^2}$ . De plus,  $\lim_{0^+} \varphi = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} \varphi = 0$ . Le théorème de changement de variable assure alors que :

$$I = \int_{+\infty}^0 -\frac{dx}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}.$$

La convergence de la seconde intégrale est garantie par le théorème de changement de variable.

3. D'après la question précédente, on a (par linéarité et d'après les calculs de la question 1)

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi : } I = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 3**

1. La variable  $X^0$  est constante égale à 1 donc  $\mathbb{E}(X^0) = 1$ . On sait que  $\mathbb{E}(X) = 0$ . Puisque  $\mathbb{V}(X) = 1$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1$ , d'après la formule de König-Huygens.
2. Montrer que  $X$  admet un moment d'ordre  $k$ , i.e.  $X^k$  admet une espérance, revient, via le théorème du transfert à montrer la convergence (simple, l'intégrande étant positive sur  $\mathbb{R}$ ) de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Les fonctions  $u : x \mapsto \frac{x^{k-1}}{\sqrt{2\pi}}$  et  $v : x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2}}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et on calcule que  $u' : x \mapsto (k-1) \frac{x^{k-2}}{\sqrt{2\pi}}$  et  $v' : x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Or, par croissances comparées, on a :

$$u(x)v(x) = -\frac{x^{k-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad u(x)v(x) = -\frac{x^{k-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Le théorème d'intégration par parties assure donc que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (k-1) \frac{x^{k-2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

sont de même nature. Par hypothèse, la seconde intégrale est convergente (on reconnaît  $(k-1)\mathbb{E}(X^{k-2})$ ), donc la première l'est aussi. Ainsi  $X^k$  admet une espérance, i.e.  $X$  admet un moment d'ordre  $k$  et le théorème d'intégration par parties assure que :

$$\boxed{\mathbb{E}(X^k) = (k-1)\mathbb{E}(X^{k-2}).}$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

$X^0$  admet une espérance, égale à 1 et  $\frac{(2 \times 0)!}{2^0 0!} = 1 = \mathbb{E}(X^0)$ . La propriété est donc initialisée.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $X$  admet un moment d'ordre  $2n$ . D'après la question 1.b,  $X$  admet un moment d'ordre  $2n + 2$  et :

$$\mathbb{E}(X^{2n+2}) = (2n + 2 - 1) \mathbb{E}(X^{2n}) = (2n + 1) \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n + 2)!}{(2n + 2)2^n n!} = \frac{(2n + 2)!}{2^{n+1}(n + 1)!}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel, i.e. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^{2n}$  admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

4. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$ .

$X^1$  admet une espérance, égale à 0 ; la propriété est donc initialisée.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $X$  admet un moment d'ordre  $2n + 1$ . D'après la question 1.b,  $X$  admet un moment d'ordre  $2n + 1 + 2 = 2n + 3$  et :

$$\mathbb{E}(X^{2n+3}) = (2n + 3 - 1) \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel, i.e. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^{2n+1}$  admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0.$$

5. D'après les deux dernières questions, la variable aléatoire  $X$  admet des moments de tout ordre pair et impair, donc des moments de tout ordre.

#### Exercice 4

1. La fonction  $\ell_{\alpha,r}$  est positive sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si  $\alpha \geq 0$ .

De plus, si  $\alpha = 0$ , la fonction  $\ell_{\alpha,r}$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ , l'empêchant ainsi d'être une densité de probabilité. On se place désormais dans le cas où  $\alpha > 0$  (valeur pour laquelle on vérifie aisément que  $\ell_{\alpha,r}$  est positive sur  $\mathbb{R}$ ).

La fonction  $\ell_{\alpha,r}$  est continue sur  $]0, r[$  par opérations sur les fonctions usuelles. Étant nulle sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ , elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0 et  $r$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

$$\int_{\varepsilon}^r \ell_{\alpha,r}(t) dt = \int_{\varepsilon}^r \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{r^{\alpha}} dt = \left[ \frac{t^{\alpha}}{r^{\alpha}} \right]_{\varepsilon}^r = 1 - \frac{\varepsilon^{\alpha}}{r^{\alpha}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1.$$

L'intégrale  $\int_0^1 \ell_{\alpha,r}(t) dt$  converge donc et vaut 1.

Puisque  $\ell_{\alpha,r}$  est nulle en dehors de  $]0, r[$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \ell_{\alpha,r}(t) dt$  converge donc et vaut 1.

On en déduit que  $\ell_{\alpha,r}$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si,  $\alpha > 0$ .

2. a. On trouve que, pour tout  $x \leq 0$ ,  $F(x) = 0$ , pour tout  $x \geq r$ ,  $F(x) = 1$  et :

$$\forall x \in ]0, r[, F(x) = \int_0^x \ell_{\alpha,r}(t) dt = \frac{x^{\alpha}}{r^{\alpha}}.$$

La fonction de répartition de  $X$  est donc la fonction :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^{\alpha}}{r^{\alpha}} & \text{si } 0 < x < r \\ 1 & \text{si } x \geq r. \end{cases}$$

b. Soit  $w \in \mathbb{R}$ .

$$\mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}\left(-\ln\left(\frac{X}{r}\right) \leq w\right) = \mathbb{P}(X \geq re^{-w}) = 1 - \mathbb{P}(X < re^{-w}).$$

Si  $w < 0$ ,  $re^{-w} > r$  et ainsi  $\mathbb{P}(W \leq w) = 0$ .

Si  $w \geq 0$ ,  $re^{-w} \in ]0, r[$  et ainsi  $\mathbb{P}(W \leq w) = 1 - \frac{(re^{-w})^{\alpha}}{r^{\alpha}} = 1 - e^{-\alpha w}$ .

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi usuelle :  $W$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .

3. a. On a :  $-U_2(\Omega) = \mathbb{R}^-$ . Pour tout  $x > 0$ ,  $\mathbb{P}(-U_2 \leq x) = 1$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \mathbb{P}(-U_2 \leq x) = \mathbb{P}(U_2 \geq -x) = 1 - \mathbb{P}(U_2 < -x) = e^{\mu x}.$$

La fonction de répartition de  $-U_2$  est donc la fonction :

$$F_{-U_2} : x \mapsto \begin{cases} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction  $F_{-U_2}$  est nulle donc  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par opérations sur les fonctions usuelles,  $F_{-U_2}$  est aussi  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_-^*$ . La fonction  $F_{-U_2}$  est donc  $\mathcal{C}^1$  (donc continue) sur  $\mathbb{R}^*$ .

De plus,  $F_{-U_2}(0) = 1$ ,  $\lim_{0^-} F_{-U_2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\mu x} = 1$  et  $\lim_{0^+} F_{-U_2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ . La fonction  $F_{-U_2}$  est donc continue en 0 et donc sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit donc que  $-U_2$  est une variable aléatoire à densité, de densité donnée par la fonction :

$$f_{-U_2} : t \mapsto \begin{cases} \mu e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

- b. Les variables aléatoires  $U_1$  et  $-U_2$  sont indépendantes (car  $U_1$  et  $U_2$  le sont) et à densité (qu'on notera respectivement  $f_{U_1}$  et  $f_{-U_2}$ ), donc leur somme  $U_1 - U_2$  est une variable aléatoire à densité, de densité donnée par la fonction :

$$g : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_{U_1}(t-x) f_{-U_2}(x) dx.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a :  $f_{U_1}(t-x) f_{-U_2}(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t-x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq t \\ x \leq 0 \end{cases}$ .

- Supposons que  $t \leq 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\mu}(t) &= \int_{-\infty}^t \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mu e^{\mu x} dx \\ &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{(\lambda+\mu)x} dx \\ &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \left[ \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} \right]_{-\infty}^t \\ &= \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} \quad \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\lambda+\mu)x} = 0 \text{ car } \lambda+\mu > 0 \right). \end{aligned}$$

- Supposons que  $t > 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\mu}(t) &= \int_{-\infty}^0 \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mu e^{\mu x} dx \\ &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+\mu)x} dx \\ &= \lambda \mu e^{-\lambda t} \left[ \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} \quad \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\lambda+\mu)x} = 0 \text{ car } \lambda+\mu > 0 \right). \end{aligned}$$

La fonction

$$g_{\lambda,\mu} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

est donc une densité de  $U_1 - U_2$ .

- c. On remarque  $Z = -\ln\left(\frac{sX}{rY}\right) = -\ln\left(\frac{X}{r}\right) + \ln\left(\frac{Y}{s}\right)$ . En posant,  $U_1 = -\ln\left(\frac{X}{r}\right)$  et  $U_2 = -\ln\left(\frac{Y}{s}\right)$ , on a  $Z = U_1 - U_2$ . D'après la question 2.c, les variables  $U_1$  et  $U_2$  suivent respectivement les lois exponentielles de paramètre  $\alpha$  et  $\beta$ .

Puisque les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $U_1$  et  $U_2$  sont indépendantes. D'après la question 3.b, la variable aléatoire  $Z = U_1 - U_2$  est à densité et  $g_{\alpha,\beta}$  est une densité de  $Z$ .

De plus :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}\left(\frac{sX}{rY} < \frac{s}{r}\right) = \mathbb{P}\left(Z > -\ln\left(\frac{s}{r}\right)\right) = \int_{-\ln(\frac{s}{r})}^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t) dt.$$

- Supposons que  $s < r$ . Alors  $-\ln\left(\frac{s}{r}\right) > 0$  et ainsi :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\ln(\frac{s}{r})}^{+\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} dt = \left[ -\frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} \right]_{-\ln(\frac{s}{r})}^{+\infty} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{s}{r}\right)^{\alpha}.$$

- Supposons que  $s \geq r$ . Alors  $-\ln\left(\frac{s}{r}\right) \leq 0$  et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \int_{-\ln(\frac{s}{r})}^0 \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{\beta t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} dt \\ &= \left[ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{\beta t} \right]_{-\ln(\frac{s}{r})}^0 + \left[ -\frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(1 - e^{-\beta \ln(\frac{s}{r})}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{r}{s}\right)^{\beta}. \end{aligned}$$

On peut alors conclure :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{s}{r}\right)^{\alpha} & \text{si } s < r \\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{r}{s}\right)^{\beta} & \text{si } r \leq s. \end{cases}$$

**Exercice 5****I. Matrice de transition**

1. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ , la famille  $([X_n = k])_{0 \leq k \leq 2}$  forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = 0)$$

Or, d'après la description de l'expérience, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = 0, \quad \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) = 0.$$

On en déduit ainsi que  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1)$ . Par le même argument, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = A_2 Y_n.}$

- b. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \\ -\lambda & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 1/2 - \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{où } Q(\lambda) = \lambda + 2\lambda \left( \frac{1}{2} - \lambda^2 \right) = \lambda(2 - 2\lambda^2) = -2\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Ainsi :  $\lambda \in \text{Sp}(A_2) \Leftrightarrow \text{rg}(A_2 - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1; 0; 1\}$ . On en déduit que  $A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  admet trois valeurs propres distinctes.  $A_2$  est donc diagonalisable. On trouve rapidement que :

- $\dim \text{Ker}(A_2 + I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- $\dim \text{Ker}(A_2) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
- $\dim \text{Ker}(A_2 - I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

On en déduit que  $A_2 = PDP^{-1}$  où :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

Puisque  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$ , la famille  $([X_n = k])_{0 \leq k \leq N}$  forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = i)$$

Or, toujours d'après la description de l'expérience et par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = i) = \begin{cases} \frac{k}{N} & \text{si } i = k - 1 \text{ et } k \geq 1 \\ \frac{N - k}{N} & \text{si } i = k + 1 \text{ et } k \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient alors le résultat attendu de la même manière que dans la question 1.a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = A Y_n.}$$

3. Lorsque  $N = 2$ ,  $A = A_2$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A^T - I_3) &\Leftrightarrow A_2^T X = X \\ &\Leftrightarrow 2A_2^T X = 2X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2x \\ x + z = 2y \\ 2y = 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\text{Ker}(A^T - I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Lorsque  $N = 3$ , on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ .

$$X \in \text{Ker}(A^T - I_4) \Leftrightarrow A^T X = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x \\ x + 2z = 3y \\ 2y + t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t$$

On en déduit que  $\text{Ker}(A^T - I_4) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

4. Remarquons que la somme des coefficients de chaque colonne de  $A$  vaut 1. Ainsi la somme des coefficients de chaque ligne de  $A^T$  vaut 1.

On en déduit que le vecteur colonne  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$  est un vecteur propre

de  $A^T$ , associé à la valeur propre 1.

5. Puisque 1 est valeur propre de  $A^T$ , alors la matrice  $A^T - I_3$  n'est pas inversible. Or  $(A - I_{N+1})^T = A^T - I_3$ . La matrice  $(A - I_{N+1})^T$  n'est donc pas inversible.

On en déduit que sa transposée, la matrice  $A - I_{N+1}$ , est aussi non inversible, impliquant ainsi que 1 est valeur propre de  $A$ .

## II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire $X_n$

1. À chaque tour, on ne peut retirer ou ajouter une seule boule à l'urne  $U_1$ .

Les seules valeurs que peut prendre la variable  $X_{n+1} - X_n$  sont 1 et -1.

2. On commence par remarquer que les variables aléatoires  $X_n$  et  $X_{n+1} - X_n$  sont finies donc admettent chacune une espérance.

En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([X_n = k])_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} - X_n = -1) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) \quad (\text{car } \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = -1) = 0) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E}(X_n). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \frac{1}{N} \mathbb{E}(X_n).$$

Ainsi, par définition de l'espérance de  $X_{n+1} - X_n$ , on a :

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1 - \frac{2}{N} \mathbb{E}(X_n).$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{N-2}{N} \mathbb{E}(X_n) + 1.$$

La suite  $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc arithmético-géométrique. Posons, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \mathbb{E}(X_n) - \frac{N}{2}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \mathbb{E}(X_{n+1}) - \frac{N}{2} \\ &= \frac{N-2}{N} \mathbb{E}(X_n) + 1 - \frac{N}{2} \\ &= \frac{N-2}{N} \left( u_n + \frac{N}{2} \right) + 1 - \frac{N}{2} \\ &= \frac{N-2}{N} u_n + \frac{N-2}{2} + 1 - \frac{N}{2} \\ &= \frac{N-2}{N} u_n. \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison  $\frac{N-2}{N}$  et de premier terme  $u_0 = \mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2}$ . On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left( \frac{N-2}{N} \right)^n \left( \mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2} \right).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = \frac{N}{2} + \left( \frac{N-2}{N} \right)^n \left( \mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2} \right).$$

4. Puisque  $-1 < \frac{N-2}{N} < 1$ , il vient que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{N-2}{N} \right)^n = 0$  et ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{N}{2}.$$

On en déduit qu'après un grand nombre de tours, les urnes  $U_1$  et  $U_2$  contiendront en moyenne autant de boules.

### III. Étude de la probabilité stationnaire

1. Montrons le résultat par récurrence double sur  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Puisque  $\binom{N}{0} x_0 = x_0$ , le résultat est vrai pour  $k = 0$ . En lisant la première ligne du système  $AX = X$ , on obtient  $\frac{1}{N} x_1 = x_0$ , i.e.  $x_1 = N x_0 = \binom{N}{1} x_0$ . Le résultat est donc vrai pour  $k = 1$ .

Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Supposons que  $x_{k-2} = \binom{N}{k-2} x_0$  et  $x_{k-1} = \binom{N}{k-1} x_0$ .

La lecture de la  $k$ -ème ligne de système  $AX = X$  fournit l'égalité suivante

$$\frac{N-k+2}{N} x_{k-2} + \frac{k}{N} x_k = x_{k-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{k} x_{k-1} - \frac{N+2-k}{k} x_{k-2} \\ &= \frac{1}{k} \binom{N}{k-1} x_0 - \frac{N+2-k}{k} \binom{N}{k-2} x_0 \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \left( \frac{N!}{k!(N+1-k)!} - \frac{N!}{k(k-2)!(N-k+1)!} \right) x_0 \\ &= \left( \frac{kN!}{k!(N-k)!} - \frac{(k-1)N!}{k!(N-k)!} \right) x_0 \\ &= \binom{N}{k} x_0, \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, x_k = \binom{N}{k} x_0.$$

2. On sait que 1 est valeur propre de  $A$  donc  $\dim E_1 \geq 1$ .  
D'après la question précédente,  $E_1 = \text{Vect}(u)$ , où :

$$u = \begin{pmatrix} \binom{N}{0} \\ \vdots \\ \binom{N}{n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $\dim E_1 = 1$ .

3. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$S = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} 1^k 1^{N-k} = 2^N.$$

4. Soit  $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ . D'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^N \pi_k = \pi_0 \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N \pi_0.$$

Il existe donc un unique vecteur  $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$  tel que  $\sum_{k=0}^N \pi_k = 1$ , il s'agit du vecteur vérifiant

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \pi_k = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}.$$

5. Puisque :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \mathbb{P}(X_\infty = k) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k} = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}.$$

La variable  $X_\infty$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $\frac{1}{2}$  et :

$$\mathbb{E}(X_\infty) = \frac{N}{2} \text{ et } V(X_\infty) = \frac{N}{4}.$$

6. On suppose que  $X_0$  suit la même loi que  $X_\infty$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètre  $N$  et  $\frac{1}{2}$ .

Le résultat est vrai pour  $n = 0$  par hypothèse.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $\frac{1}{2}$ . Cela signifie que  $Y_n = \pi$ . Puisque  $\pi \in E_1$ ,  $Y_{n+1} = AY_n = A\pi = \pi$  (le vecteur  $\pi$  est vecteur propre associé à la valeur propre 1). Ainsi  $X_{n+1}$  suit la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $\frac{1}{2}$ , ce qui conclut la récurrence.

Si  $X_0$  suit la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $\frac{1}{2}$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la variable  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $\frac{1}{2}$ .

Si le nombre initial de boules dans l'urne 1 suit la loi stationnaire (la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $\frac{1}{2}$ ), le nombre de boules dans l'urne 1 suivra encore cette loi à chaque tour.

\*   \*

\*